This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Math 3238.49.3 (vol.1)

SCIENCE CENTER LIBRARY

BOUGHT WITH INCOME

FROM THE BEQUEST OF

HENRY LILLIE PIERCE

OF BOSTON

UNDER A VOTE OF THE PRESIDENT AND FELLOWS
OCTOBER 24, 1908

Cover Math 3238.99.3

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION GRAPHIQUE

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PAR

J. MASSAU,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'Université de Gand.

PREMIER FASCICULE

Intégration fausse. Intégration pour les caractéristiques

Mouvement varié des eaux courantes, Mascaret

GAND

IMPRIMERIE & AUTHOGRAPHIE, F. MEYER-VAN LOO, RUE DE FLANDRE, 66

1899

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION GRAPHIQUE

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PAR

J. MASSAU.

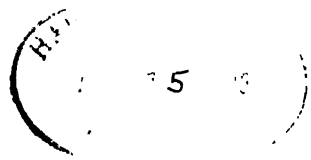
Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'Université de Gand.

GAND

IMPRIMERIE & AUTHOGRAPHIE, F. MEYER-VAN LOO, RUE DE FLANDRE, 66.

1899

Math 3238.99.3



Pierce fund.
(1).

Préface.

Ce travail est la suite de notre mémoire sur l'intégration graphique; il devait paraître dans les annales des Ingénieurs de Gand; mais à la suite des incidents que nous allons relater, nous avons cru devoir en publier d'abord une autographie.

Il y a un an et demi, M. Haerens, directeur des publications de la société des ingénieurs sortis des écoles de Gand, nous demanda d'étudier la question de la poutre Vierendeel. Quelques jours plus tard, nous lui communiquâmes, en présence de plusieurs camarades, une méthode générale pour calculer les tensions dans les treillis formés de triangles ou de quadrangles, en supposant la rigidité des nœuds et en tenant compte des déformations des barres par flexion, extension et glissement. Voici en substance quelle est cette méthode. Le vecteur qui représente les trois éléments d'une tension est une fonction linéaire du vecteur qui représente les trois éléments de la rotation relative des sections extrêmes. Pour chaque nœud ou pour chaque triangle ou quadrilatère, la somme des vecteurs forces ou vecteurs rotations est nulle. Si l'on se donne arbitrairement la tension de la première barre, toutes les autres tensions sont des fonctions linéaires de la tension arbitraire. On calcule la tension arbitraire par la résolution de trois équations linéaires, ou la construit graphiquement au moyen de 4 fausses positions. Dans la poutre Vierendeel, la direction horizontale est une droite double de toutes les fonctions linéaires et d'après une propriété bien connue la relation linéaire existe entre les projections des tensions; d'où résulte le théorème des trois tensions successives. Des autres relations résulte le théorème des 3 moments (ou des 5 moments, si l'on veut plus d'exactitude) Le calcul des tensions et moments fléchissants est analogue au calcul d'une poutre à plusieurs travées.

M. Haerens nous dit alors qu'il allait procéder à des calculs numériques dans toutes les hypothèses puis il publia une note où il n'y avait aucun calcul, mais où il avait mis sous son nom les théorèmes que nous lui avions communiqués.

Dans le tome XII des annales des Ingénieurs de Gand, nous avons publié une note ainsi conçue:

« page 435. Nous avons eu l'occasion, quand nous étions en service, d'appliquer l'intégration graphique
« aux équations aux dérivées partielles. On se donne des courbes arbitraires et s'il y a lieu, des dérivées le long
« de ces courbes; on détermine les éléments de proche en proche. Les discontinuités des courbes arbitraires
« se propagent suivant les caractéristiques de Monge. Dans le mouvement varié des eaux courantes,
« ces caractéristiques représentent le mouvement de deux ondes infiniment petites, l'onde d'amont, l'onde
« d'aval; l'onde devient finie quand il y a mascaret. Dans la poussée des terres, ces caractéristiques
« divisent le massif en régions; une des régions se trouvent sous l'influence du mur de soutènement;
« une autre se trouve dans les mêmes conditions que si le massif était indéfini. Ces recherches feront l'objet
« d'un mémoire spécial »

M. Haerens, qui nous voit tous les jours, s'est livré à notre égard, à quelques investigations diplomatiques au sujet de cette note. Puis, sans rien nous dire, il publia dans les annales des Ingénieurs de Ga

annales des travaux publics de Belgique une note où il est question d'équations aux dérivées partielles, de courbes arbitraires, d'intégration par élément et de proche en proche. Il ne parle pas de caractéristiques; il a cru pouvoir s'en passer en choisissant avec soin les données de manière à éviter les discontinuités apparentes. Malheureusement les discontinuités auxquelles nous avons fait allusion, peuvent être cachées dans les dérivées d'ordre quelconque. M. Haarens n'a pu les éviter et ses calculs sont faux.

Les calculs de M. Haarens sont en opposition formelle avec le sentiment des choses en hydraulique. Connaissant l'axe hydraulique à l'instant t, il détermine l'axe hydraulique à l'instant $t+\Delta t$ et les circonstances d'amont et d'aval exercent leur influence sur toute l'étendue du nouvel axe hydraulique. Cela ne peut pas être; on sait que les modifications de régime se propagent avec une certaine vitesse, mais non instantanément.

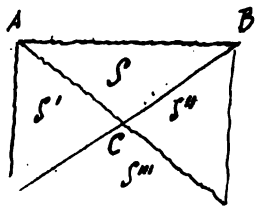
C'est par des tâtonnements nombreux que M. Haarens détermine le nouvel axe hydraulique. Cela est contraire aux sentiments des choses en Mécanique. En dynamique, on peut toujours calculer sans tâtonnements les accélérations et les différentielles des vitesses. Il ne peut y avoir de tâtonnements que quand il s'agit de trouver une position d'équilibre, un mouvement uniforme, un mouvement permanent, parce que la nature elle-même n'atteint ces solutions particulières qu'après des espèces d'hésitations: oscillations, convergence etc...

Les calculs de M. Haarens sont en contradiction flagrante avec le théorème fondamental sur l'intégrale générale des équations aux dérivées partielles: il n'y a qu'une seule intégrale régulière satisfaisant à des conditions initiales données. M. Haarens se donne l'axe hydraulique initial, introduit encore les conditions d'aval et d'amont; en faisant varier ces conditions, il trouvera une infinité de solutions n'ayant de commun que l'axe initial. Cela ne serait possible que si l'axe initial était une caractéristique et on démontre que cela n'arrive jamais.

La Genèse du travail de M. Haarens est facile à reconstituer. M. Haarens s'est dit que l'intégration par élément, dont nous avions parlé, devait certainement consister à déduire d'un élément AB de l'axe hydraulique à l'instant t, l'élément correspondant $A'B'$ à l'instant $t+\Delta t$. Il a compté les inconnues: profondeurs et vitesses aux points A' et B'; les conditions d'amont et d'aval réduisent ces inconnues à deux; il a donc écrit deux équations et il a pu croire qu'il avait résolu la question. Mais il aurait dû aussi compter toutes les équations du problème; il aurait vu qu'il en avait 4: les équations du mouvement en A et B. et alors il aurait vu qu'il s'était jeté dans un piège infernal; car, s'il écrivait toutes les équations, il y avait trop de données, le problème était impossible et s'il écrivait autant d'équations que d'inconnues

toutes les conditions du problème n'étaient pas satisfaites ; la solution était fausse.

On ne peut sortir de ce piège qu'en utilisant les propriétés des caractéristiques. Si on porte le temps suivant une perpendiculaire au profil en long de la rivière, l'axe hydraulique engendre une surface hydraulique qu'il s'agit de construire. Connaissant l'axe initial AB, la surface hydraulique régulière S est déterminée en vertu du théorème de l'intégrale générale. On peut tracer sur cette surface deux systèmes de caractéristiques. Par la caractéristique AC, il passe une infinité de solutions et on peut déterminer une surface S' qui satisfait aux conditions d'amont. On trouve de même une surface intégrale S'' qui passe par BC et satisfait aux conditions d'aval. Il y a donc trois surfaces au lieu d'une et c'est ce qui rend le problème possible.



Considérons une longueur quelconque du canal ; en général, l'axe initial, la courbe des débits, la courbe des niveaux d'aval sont des lignes graphiques irrégulières et présentant des discontinuités dans les dérivées. Ces discontinuités se propagent suivant les caractéristiques qui divisent la surface en triangles et en quadrangles ; ce sont là les éléments qu'il faut déterminer de proche en proche. Si on intègre sur la surface suivant une direction quelconque, on rencontre les discontinuités ; toutes les formules d'intégration approchées sont fausses.

Il est facile de voir que M. Haarens n'a trouvé respecté les principes de l'analyse élémentaire ; il suppose le mouvement permanent troublé par une crue. La ligne qui représente la variation du niveau des eaux dans une section est formée d'une ligne horizontale suivie d'une courbe qui commence on ne sait quand et c'est à la fonction représentée par cette courbe que M. Haarens applique des formules qui supposent la continuité de toutes les dérivées. Il a commis une faute analogue à celle qui consisterait à calculer un polygone, en appliquant la formule de Taylor à un des côtés. Ce que l'on peut trouver de mieux, c'est le prolongement du côté initial et si M. Haarens n'a pas trouvé le mouvement permanent prolongé indéfiniment c'est qu'il n'a écrit que deux équations sur 4.

Nous avons cru relever toutes ces erreurs parce que, si nous ne l'avions pas fait, un autre l'aurait certainement et si cet autre était un étranger peu bienveillant pour la Belgique, quels commentaires ne pourrait-il pas joindre à la critique.

« M. Haarens, écrira-t-il, est professeur à l'université de Gand et directeur des publications de « la société des Ingénieurs de l'école de Gand. M. Massau, un autre professeur de la même univer- « -sité a annoncé autrefois un mémoire sur le même sujet. Il est bien évident que le directeur des « publications a pris connaissance du mémoire annoncé dans les annales qu'il dirige ou tout

« au moins de la substance de ce mémoire. Il ne l'a pas cité; donc c'est que les idées annoncées étaient « fausses ou inexactes et que du commencement de l'auteur, le silence a été fait sur ces idées. On peut donc « affirmer que travail de M. Haerens contient les idées les plus élevées qui hantent les cerveaux des deux « professeurs d'hydrodynamique de l'école de Gand.

« Le mémoire de M. Haerens a été imprimé dans les annales des ingénieurs de Gand; il a dû être « examiné par une commission quelconque de cette association:

« Le mémoire de M. Haerens a été publié aux frais du gouvernement belge, dans les annales des travaux « publics. Il a donc été approuvé par le comité de rédaction de ces annales, comité qui comprend dans son « sein, les plus hauts fonctionnaires du corps des ponts et chaussées. »

Et constatant alors que ce travail est en contradiction avec le sentiment des choses en hydraulique et en Mécanique, que les principes de l'analyse et de la mécanique sont violés, que la théorie des équations aux dérivées partielles est méconnue, il pourra s'écrier: voilà le niveau scientifique des corps savants de la Belgique.

Nous avons cru qu'il était de notre devoir de réduire l'incident à ses justes proportions. En ce qui nous concerne, nous avons suffisamment démontré que les ressemblances qui existent entre la note que nous avons publiée et celle de M. Haerens sont plus apparentes que réelles. En ce qui concerne la société des Ingénieurs de Gand, nous croyons ne pas nous tromper en affirmant que les membres du comité de cette association n'ont pas même vu la couverture du travail de M. Haerens. Nous aimons à croire que les choses se sont passées à peu près de la même manière au comité de rédaction des annales des travaux publics de Belgique.

En ce qui concerne M. Haerens, il n'y a, au point de vue scientifique, qu'un incident banal à signaler: une erreur commise dans un moment de distraction. Cela peut nous arriver aussi, cela peut arriver à tout le monde, cela est même arrivé à des mathématiciens de talent, et c'est précisément parce que nous sommes exposés à nous tromper, que nous tenons absolument à n'être rendus responsables que des fautes que nous commettons nous-mêmes.

Si plus tard, un publiciste étranger, arguant du travail de M. Haerens, se gausse des connaissances hydrauliques des ingénieurs belges, nous lui répondrons qu'il n'y a que ceux qui ne font rien qui ne se trompent jamais. Nous pourrions même ajouter que

« le meilleur cheval peut broncher »

et nous n'aurons plus à redouter qu'on nous lance cette injure célèbre:

« Un cheval peut broncher, je le veux bien; mais chez vous, en Belgique, ce sont toutes vos écuries »

Gand, Juillet-Août 1899

J. Massau.

Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles.

Chapitre premier.

Intégration par élément suivant une variable.

§ 1. Résultats faux.

1. Courbes arbitraires. En analyse, on suppose les fonctions holomorphes, (régulières), ou développables par la formule de Taylor en série convergente dans un certain domaine). Les courbes arbitraires que l'on se donne dans les problèmes relatifs à la science de l'ingénieur ne possèdent pas cette propriété. Prenons, par exemple, la courbe des débits d'une rivière. Si le mouvement est permanent, le débit est constant; si une crue survient, la courbe des débits est formée d'une droite et d'une courbe; la fonction qu'elle représente est évidemment irrégulière. Si même l'on ne considère que la courbe des débits pendant la crue, elle se présente aussi une fonction irrégulière; car si le débit était une fonction développable, connaissant le plus petit arc AB de la courbe des débits, on pourrait calculer toutes les dérivées, écrire le développement et déterminer toute la courbe. Or la courbe qui suit l'arc AB, dépend

des manoeuvres hydrauliques, de la persistance des pluies et de bien des circonstances qui sont indépendantes de l'arc A.3. Tout ce que l'on peut supposer, c'est de pouvoir remplacer une courbe arbitraire de cette espèce par un polygone ou une suite d'arcs, chacun des fragments étant la représentation d'une fonction holomorphe. Aux points de jonction, il y a alors des discontinuités dans les dérivées premières ou d'ordre supérieur.

2. Méthode d'intégration approchée. Soit l'équation du premier ordre :

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

On peut considérer la fonction inconnue z comme l'ordonnée d'une surface ; c'est la surface intégrale. Proposons-nous de trouver une surface intégrale passant par une courbe arbitraire $A_0 B_0$ que nous supposerons tracée dans le plan des yz :

$$x = x_0 = 0.$$

En un point A_0 on connaît :

$$x_0, \quad y_0, \quad z_0, \quad q_0 = \frac{\partial z_0}{\partial y_0}.$$

L'équation aux dérivées partielles permet de calculer :

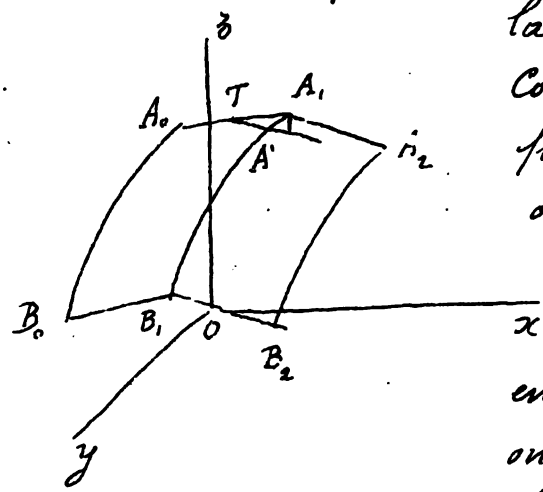
$$p_0 = \varphi(x_0, y_0, z_0, q_0)$$

Faisons varier x_0 de Δx_0, on peut écrire :

$$dz_0 = p_0\,dx_0 \quad , \quad \text{d'où} \quad \Delta z_0 = p_0\,\Delta x_0$$

approximativement. On détermine ainsi un point A_1

voisine du point A_0. En faisant ce calcul le long de la courbe $A_0 B_0$, on déterminera une courbe $A_1 B_1$, section de la surface intégrale par le plan $x_0 + \Delta x_0$. De la courbe $A_1 B_1$, on passera à la courbe $A_2 B_2$ située dans le plan $x_0 + 2\Delta x_0$ et ainsi de suite.



On obtiendra un calcul plus exact en assimilant l'arc $A_0 A'$ à une parabole; on mène par T milieu de $A_0 A_1$ une parallèle à $A_1 A_2$, ce qui donne A' au lieu de A_1.

Lorsqu'on a une première ébauche de surface intégrale, on peut toujours la perfectionner en calculant les valeurs de p et en intégrant p dx par les quadratures approchées.

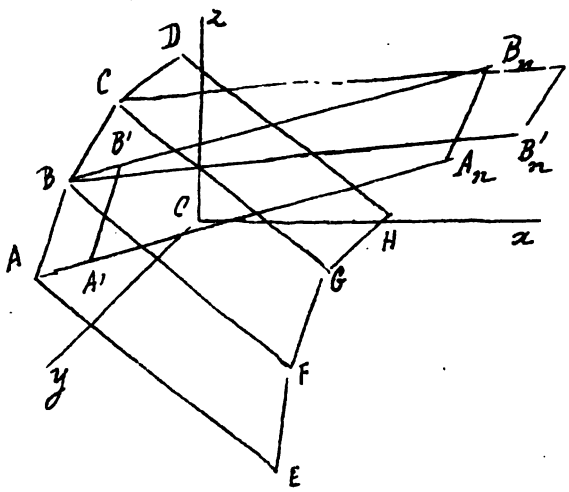
3 Tentative de démonstration. Supposons que Δx_0 converge vers zéro et admettons bénévolement que l'ensemble des surfaces réglées déterminées comme il a été dit, a une limite. D'après la manière dont les calculs ont été faits, l'équation aux dérivées partielles est satisfaite le long des courbes $A_0 B_0$, $A_1 B_1$, etc... ; ces courbes sont infiniment rapprochées ; on est en droit de conclure que la surface limite satisfait à l'équation proposée en tous ses points ; c'est donc l'intégrale cherchée. S'il en est ainsi, la surface primitivement construite est bien une solution approchée, car en prenant Δx_0 assez petit, elle s'approchera autant qu'on le voudra de la surface intégrale. Nous allons montrer par des exemples que tout cela est faux, dès que la courbe donnée $A_0 B_0$ est réellement arbitraire c'est-à-dire irrégulière.

4 Premier exemple. Quand il s'agit d'essayer expérimentalement les méthodes d'intégrations approchées,

ou les intégronètes, on applique ces procédés à des exemples pour lesquels on possède la valeur exacte des aires à évaluer. Nous allons suivre la même voie et appliquer l'intégration par éléments à une équation dont on connaît l'intégrale générale : on demande de construire, sur une partie du plan des xy, une surface continue satisfaisant à l'équation

$$p + q = 0$$

et passant par un polygone $ABCD$ tracé dans le plan des yz. L'intégrale générale est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la bissectrice de l'angle xoy ; la solution juste du problème est donc une surface prismatique formée des plans $ABFE$, $BCGF$, etc..

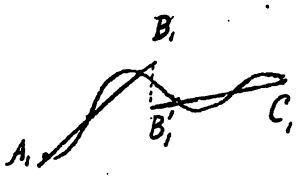


Voyons ce que donne l'intégration par éléments. Partons de AB ; on trouve :

$$p_0 = -q_0 = \text{Constante}.$$

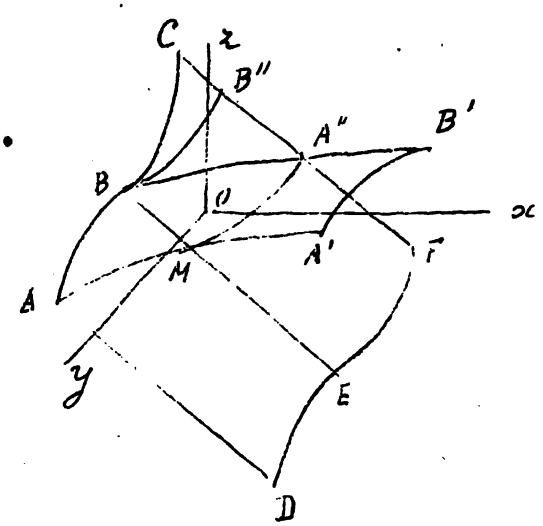
On trouve un plan $ABB'A'$ que se prolonge indéfiniment et qui est limité par deux droites AA_n et BB_n parallèles au plan des zx. Il n'y a qu'une petite partie de ce plan qui appartient à la solution juste ; le reste est faux. Si nous partons de BC, nous trouvons un nouveau bandeau et l'on passe brusquement de BB_n à BB'_n quand on fait mouvoir un plan sécant parallèle au plan des zx.

Si nous représentons la section $x_0 + \Delta x_0$, nous trouvons

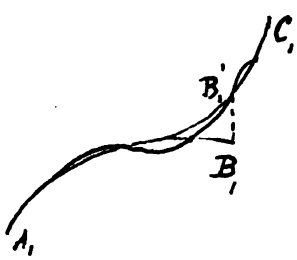


les droites A_1B_1, B'_1C_1, c'est-à-dire une ligne discontinue. Mais si l'équation est plus compliquée, on devra construire par points les lignes analogues à A_1B_1 et B'_1C_1 ; on ignorera l'existence et l'emplacement de la discontinuité ; on essaiera de réunir les points par un trait continu et l'on trouvera les résultats les plus extravagants.

5. Deuxième exemple. On pourrait croire que les difficultés que nous avons rencontrées dans l'exemple précédent proviennent des angles du polygone donné ; il n'en est rien. Reprenons la même équation aux dérivées partielles et donnons-nous comme courbe arbitraire un arc de circonférence AB convexe vers le haut se raccordant en B à un arc de circonférence concave vers le haut. La solution juste du problème est donnée par deux surfaces cylindriques se raccordant suivant la génératrice BE ; l'un de ces cylindres est convexe, l'autre est concave vers le haut. Voyons ce que donne l'intégration par éléments en suivant la variable x. Si nous partons de l'arc AB, nous trouvons une zône comprise entre deux courbes AA' et BB' situées dans des plans parallèles au plan des xz. Or tous les calculs sont indépendants de la manière dont l'arc AB est prolongé ; ils sont les mêmes que si la courbe initiale était la circonférence AB toute entière. Ce que l'on



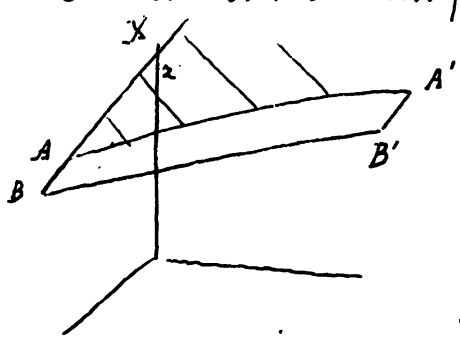
pour trouver de mieux, c'est donc une zône du cylindre convexe vers le haut, limitée par deux arcs d'ellipse AA' et BB'. En comparant ces résultats à la solution juste, nous voyons que nous trouvons une ellipse AMA' convexe vers le haut, alors qu'à partir du point M de la génératrice BF, nous devions trouver un arc d'ellipse MA'' concave vers le haut. Si nous partons de l'arc CC, nous trouvons qu'en B la section parallèle au plan des xz varie brusquement de la courbe convexe BB' à la courbe concave BB''. Représentons en vraie grandeur la section faite par le plan $x_0 + \Delta x_0$; nous trouvons deux arcs A_1B_1 et B'_1C_1,



avec une discontinuité. Mais s'il s'agit d'une équation que l'on ne sait pas intégrer exactement, les courbes analogues à A_1B_1 et B'_1C_1 seront déterminés par points et en voulant réunir ces points par un trait continu, on obtiendra les résultats les plus extravagants.

On pourrait former la courbe initiale au moyen de deux arcs se raccordant par un contact aussi élevé que l'on voudrait ; la méthode d'intégrations pour éléments et suivant une variable donnerait toujours des résultats absolument faux.

6 Troisième exemple. Nous demandons au lecteur de bien vouloir penser une courbe arbitraire, de la dessiner sans nous la montrer, puis de nous en donner un petit fragment AB.



Confions dans l'intégration par

éléments, nous vous disons alors : nous allons deviner toute la courbe que vous avez pensée.

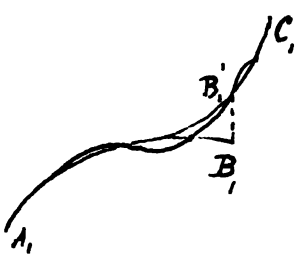
En effet, de l'arc AB, si petit qu'il soit, nous pouvons déduire une zône AA'B'B satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles que nous avons considérée précédemment. Mais comme la surface est un cylindre dont on connaît la génératrice, en prenant AA' comme directrice nous obtiendrons toute la surface et par conséquent la courbe arbitraire BAX que vous aviez pensée.

Comme il n'est pas possible de deviner les pensées par des intégrations approchées, il faut en conclure que la zône AA'B'B appartient à une surface intégrale pour laquelle la courbe initiale est une certaine courbe AX différente de la courbe donnée.

Cependant le raisonnement qui précède est suggestif. Quelle est cette courbe AX que l'on détermine si mystérieusement ? C'est une courbe qui est déterminée complètement par un petit arc AB ; les courbes qui représentent une fonction développable paraissent être les seules qui possèdent cette propriété. Il semble donc que la zône AA'B'B appartient à un cylindre qui aurait pour directrice l'arc AB prolongé analytiquement par la formule de Taylor.

7. Conclusions. Dans l'analyse moderne des équations aux dérivées partielles, on suppose les équations et les fonctions arbitraires développables en série convergente par la formule de Taylor. On pourrait croire que ces suppositions sont faites dans le but d'être rigoureux, qu'elles tiennent à la méthode d'intégration par série qui est

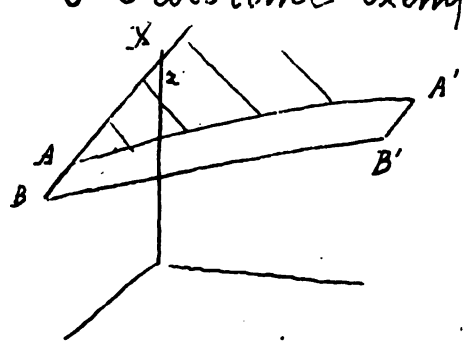
pour trouver de mieux, c'est donc une zône du cylindre convexe vers le haut, limitée par deux arcs d'ellipse AA' et BB'. En comparant ces résultats à la solution juste, nous voyons que nous trouvons une ellipse AMA' convexe vers le haut, alors qu'à partir du point M de la génératrice BF, nous devions trouver un arc d'ellipse MA'' concave vers le haut. Si nous portons de l'arc EC, nous trouvons qu'en B la section parallèle au plan des xz varie brusquement de la courbe convexe BB' à la courbe concave BB''. Représentons en vraie grandeur la section faite par le plan $x_0 + \Delta x_0$; nous trouvons deux arcs A_1B_1 et B'_1C_1,



avec une discontinuité. Mais s'il s'agit d'une équation que l'on ne sait pas intégrer exactement, les courbes analogues à A_1B_1 et B'_1C_1 seront déterminés par points et en voulant réunir ces points par un trait continu, on obtiendra les résultats les plus extravagants.

On pourrait former la courbe initiale au moyen de deux arcs se raccordant par un contact aussi élevé que l'on voudrait ; la méthode d'intégrations par éléments et suivant une variable donnerait toujours des résultats absolument faux.

6 Troisième exemple. Nous demandons au lecteur de bien vouloir penser une courbe arbitraire, de la dessiner sans nous la montrer, puis de nous en donner un petit fragment AB. Confions dans l'intégration par



éléments, nous vous disons alors : nous allons deviner toute la courbe que vous avez pensée.

En effet, de l'arc AB, si petit qu'il soit, nous pouvons déduire une zône AA'B'B satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles que nous avons considérée tout à l'heure. Mais comme la surface est un cylindre dont on connaît la génératrice, en prenant AA' comme directrice nous obtiendrons toute la surface et par conséquent la courbe arbitraire BAX que vous avez pensée.

Comme il n'est pas possible de deviner les pensées par des intégrations approchées, il faut en conclure que la zône AA'B'B appartient à une surface intégrale pour laquelle la courbe initiale est une certaine courbe AX différente de la courbe donnée.

Cependant le raisonnement qui précède est suggestif. Quelle est cette courbe AX que l'on détermine si mystérieusement ? C'est une courbe qui est déterminé complètement par un petit arc AB ; les courbes qui représentent une fonction développable paraissent être les seules qui possèdent cette propriété. Il semble donc que la zône AA'B'B appartient à un cylindre qui aurait pour directrice l'arc AB prolongé analytiquement par la formule de Taylor.

7. Conclusions. Dans l'analyse moderne des équations aux dérivées partielles, on suppose les équations et les fonctions arbitraires développables en série convergente par la formule de Taylor. On pourrait croire que ces hypothèses sont faites dans le but d'être rigoureux, qu'elles tiennent à la méthode d'intégration par série qui est

employée. Nous voyons que même quand il s'agit seulement de construire approximativement les surfaces intégrales, nous nous heurtons dès le commencement aux conditions de continuité. L'exemple du cylindre prouve à l'évidence que dès que les courbes arbitraires sont irrégulières, la méthode d'intégration par éléments en faisant croître une variable donne des résultats absolument faux. Nous avons conjecturé que cette méthode donnait des résultats exacts dans le cas d'une courbe arbitraire développable; la démonstration de cette propriété présente encore des difficultés sérieuses.

§ 2. L'intégration par éléments suivant une variable et l'intégrale régulière.

3. Intégrale régulière. Reprenons l'équation générale du premier ordre:

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

Si on se place en un point $A_0 (x_0, y_0, z_0)$ de la courbe initiale supposée dans le plan des yz, on connaît:

$$z_0 \ , \ \frac{\partial z_0}{\partial y_0} \ , \ \frac{\partial^2 z_0}{\partial y_0^2} \quad \text{etc...}$$

On peut différentier l'équation proposée successivement par rapport à chacune des variables indépendantes; on trouve: une équation entre les 2 dérivées premières dont une est connue, 2 equations entre les 3 dérivées secondes dont une est connue et ainsi de suite. On peut donc calculer toutes les dérivées de z au point A_0 et écrire le développement de Taylor. Cela est vrai aussi pour un système quelconque d'équations à plusieurs fonctions inconnues. On donne les conditions initiales pour

$x = x_0$, c'est-à-dire ce que deviennent, pour $x = x_0$, les fonctions inconnues et leurs dérivées d'ordre inférieur à l'ordre des équations et on reconnaît aussi que l'on peut écrire le développement des fonctions inconnues. Il s'agit de démontrer que les séries obtenues sont convergentes, satisfont aux équations et sont les seules fonctions régulières qui y satisfont. Ce théorème a été démontré par Cauchy à l'aide du calcul des limites ; les démonstrations de Cauchy ont été perfectionnées par M Darboux, M. Méray et Mme Kowaleski. La démonstration de Mme Kowaleski est devenue classique ; on la trouvera dans les traités d'analyse.(x).

3 Equations d'une génératrice parallèle au plan zx. Si on chemine suivant une génératrice parallèle au plan des zx, on a

$$dz = p\,dx, \qquad F(x, y, z, p, q) = 0$$

ou en tirant la valeur de p de la seconde équation :

$$dz = \varphi(x, y, z, q)\,dx$$

Cette équation contient une fonction inconnue q ; nous trouverons une nouvelle équation en différentiant par rapport à y ; on obtient :

$$dq = \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) dx \quad , \text{ où } \left(\frac{d}{dy}\right) = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\,q + \frac{\partial}{\partial q}\,t$$

On introduit encore une nouvelle inconnue t ; on écrit une

(x) Cauchy. Comptes rendus t XIV, XV et XVI ;
G. Darboux Comptes rendus t LXXX ; Sophie Kowaleski, Journal de Crelle t LXXX
Goursat Leçons sur les équations aux dérivées partielles, page 1.

nouvelle équation en différiant et ainsi de suite. Si nous désignons pour plus de facilités les fonctions inconnues par

$$z' = \frac{\partial z}{\partial y}\ ,\ z'' = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\ ,\ z''' = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\ \text{etc..}$$

on trouve :

$$dz = \varphi(x, y, z, z')\,dx\ .$$

$$dz' = \varphi_1(x, y, z, z', z'')\,dx$$

$$dz'' = \varphi_2(x, y, z, z', z'', z''')\,dx \text{ etc...}$$

10 Ebauche d'integrale. En appliquant la méthode d'intégration approchée du paragraphe précédent on trace un polygone au lieu de cette génératrice. Les éléments successifs s'obtiennent par:

$$\Delta z_0 = \varphi(x_0, y, z_0, q_0)\,\Delta x_0\ ,\quad \Delta z_1 = \varphi(x_1, y, z_1, q_1)\,dx_1$$

et ainsi de suite. La valeur de q_1 s'obtient graphiquement en menant une tangente à la courbe $x_0 + \Delta x_0$; mais on peut l'obtenir aussi par le calcul suivant:

$$z_1 = z_0 + \varphi(x_0, y, z_0, q_0)\,\Delta x_0$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial y} = \frac{\partial z_0}{\partial y} + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\Delta x_0$$

ou

$$\Delta q_0 = \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\Delta x_0$$

En adoptant les notations z, z', z'' et en continuant on trouve :

$$\Delta z_0 = \varphi(x_0, y, z_0, z_0')\,\Delta x_0$$

$$\Delta z_0' = \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\Delta x_0$$

$$\Delta z_0'' = \left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)\Delta x_0$$

Puis $\Delta z_1 = \varphi(x_1, y, z_1, z_1')\,\Delta x_1$ etc..

On voit que la méthode d'intégration approchée revient

à substituer aux équations différentielles de la génératrice, les équations aux différences que l'on obtient en supposant que les dérivées restent constantes dans chaque intervalle Δx_i.

11. Développement en série. On pourrait déduire des équations différentielles de la génératrice le développement en série de la fonction z; on retrouverait évidemment le développement de l'intégrale régulière appliqué au cas où x varie seul. Proposons-nous de chercher la limite de l'ébauche d'intégrale lorsque les intervalles tendent vers zéro. Soient $z_0, z_1, z_2, \ldots z_m$ les valeurs successives obtenues pour z; supposons:

$$\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 \ldots \qquad x - x_0 = m\,\Delta x_0$$

On déterminera z_m par la formule symbolique:

$$z_m = (1+\Delta)^m z_0$$

Le terme général du développement est:

$$T_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n}\,\Delta^n z_0 = \frac{m\Delta x_0 \times (m\Delta x_0 - \Delta x_0)\ldots}{1.\ 2.\ \ldots\ n}\,\frac{\Delta^n z_0}{\Delta x_0{}^n}$$

$$\lim T_n = \frac{(x-x_0)^n}{1.2.3.\ldots n}\cdot \lim \frac{\Delta^n z_0}{\Delta x_0{}^n}.$$

Supposons qu'au point (x_0, y, z_0) on détermine toutes les dérivées, en utilisant la courbe arbitraire et l'équation aux dérivées partielles; nous allons démontrer que

$$\lim \frac{\Delta^n z_0}{\Delta x_0{}^n} = \frac{\partial^n z_0}{\partial x_0{}^n}$$

le second membre étant la dérivée calculée comme il vient d'être dit.

On a d'abord

$$\Delta z_0 = \varphi(x_0, y, z_0, q_0)\,\Delta x_0$$

$$\lim \frac{\Delta z_0}{\Delta x_0} = \varphi(x_0, y, z_0, q_0) = \frac{\partial z_0}{\partial x_0}$$

Cherchons le second rapport:

$$\Delta z_0 = \varphi(x_0, y, z_0, q_0)\,\Delta x_0$$

$$\Delta z_1 = \varphi(x_1, y, z_1, q_1)\,\Delta x_1$$

$$\frac{\Delta^2 z_0}{\Delta x_0^2} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta x_0}$$

L'accroissement de φ doit être pris en supposant:

$$\Delta z_0 = \varphi\,\Delta x_0 \qquad \Delta q_0 = \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\Delta x_0$$

Proposons-nous de calculer $\frac{\partial^2 z_0}{\partial x_0^2}$; on a:

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial x_0^2} = \left(\frac{d\varphi}{dx_0}\right), \left(\frac{d}{dx_0}\right) = \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial z_0} p_0 + \frac{\partial}{\partial q_0} s$$

$$s = \left(\frac{d\varphi}{dy}\right), \qquad \left(\frac{d}{dy}\right) = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z_0} q_0 + \frac{\partial}{\partial q_0} t_0$$

On peut aussi écrire en remplaçant les dérivées par des limites de rapport:

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial x_0^2} = \lim \frac{\Delta \varphi}{\Delta x_0}$$

pour $\lim \frac{\Delta z_0}{\Delta x} = p_0$, $\lim \frac{\Delta q_0}{\Delta x} = \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)$

Comparons alors le calcul de $\frac{\Delta^2 z_0}{\Delta x_0^2}$ et de $\frac{\partial^2 z_0}{\partial x_0^2}$; dans le premier cas, les rapports de Δz_0, Δq_0 à Δx_0 sont remplacés immédiatement par leurs limites ; mais quand on passe alors à la limite les résultats sont identiques. Si l'on considère les différences d'ordre supérieur, les calculs deviennent de plus en plus longs, mais le raisonnement est

général. On a donc

$$\lim I_n = \frac{(x-x_0)^n}{1.2.\dots n}\,\frac{\partial^n z_0}{\partial x_0^n}$$

$$z = z_0 + \frac{x-x_0}{1}\frac{\partial z_0}{\partial x_0} + \dots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2.3..n-1}\frac{\partial^{n-1} z_0}{\partial x_0^{n-1}} + R$$

Pour avoir le reste, on exprime z_m en introduisant que les différences d'ordre n et d'ordre inférieur ; on pose

$$\lim \frac{\Delta^n z_i}{\Delta x_0^n} = f(x_i)$$

et l'on trouve toutes les formes du reste de la formule de Taylor où $f(x)$ remplace la dérivée d'ordre n. Comme $f(x)$ n'est pas connue, il reste encore un doute au sujet de l'existence de $\lim z_m$. Cependant on voit par cette analyse que l'intégration approchée revient à écrire une formule qui se rapproche de la formule de Taylor. On aurait pu croire, à première vue, que pour remplacer un arc de courbe par des tangentes successives, il suffit que les dérivées premières soient continues. Nous voyons, au contraire, que l'on introduit en réalité des différences d'ordre quelconque entre les dérivées premières, ce qui équivaut à utiliser les dérivées d'ordre supérieur. C'est ce qui explique que l'intégration approchée donne des résultats faux, alors que l'on utilise en apparence que les dérivées premières et que les discontinuités n'affectent que les dérivées d'ordre très élevé.

12. Limite de l'ébauche d'intégrale. Pour démontrer complètement que la méthode d'intégration par éléments est réellement une méthode approchée, il faudrait

inférieure z_m entre une limite supérieure et une limite inférieure en suivant la marche de la démonstration de Cauchy au sujet de l'existence de l'intégrale générale d'un système d'équations différentielles simultanées. Il se fait que le tracé graphique de z_m est précisément l'ébauche d'intégrale que l'on considère dans la démonstration de Cauchy. Mais comme il s'agit ici d'une infinité d'équations, les calculs sont plus longs et il semble plus difficile de démontrer que les deux limites tendent à se confondre.

Chapitre II

Intégration graphique par les caractéristiques.

L'exemple du cylindre fait prévoir qu'il existe, sur les surfaces intégrales des équations aux dérivées partielles, certaines lignes suivant lesquelles se propagent les discontinuités des courbes initiales ; ces lignes existent effectivement pour les équations à deux variables indépendantes ; ce sont les caractéristiques. Les équations des caractéristiques ont été écrites par Monge dans son ouvrage célèbre sur les applications de l'analyse à la géométrie. M. Darboux a apporté ensuite de grands perfectionnements à la théorie géométrique des caractéristiques. Nous pourrions écrire immédiatement les équations des caractéristiques en renvoyant le lecteur aux traités spéciaux. Cependant nous établirons ces équations ; d'abord notre travail sera ainsi

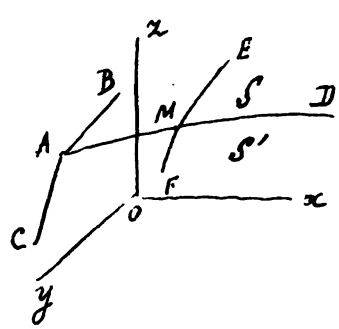
directement accessible à un plus grand nombre de lecteurs; ensuite nous devons exposer cette théorie à un point de vue spécial. En analyse, on se propose de trouver les intégrales régulières en cherchant des intégrales des équations des caractéristiques. Ici, au contraire, nous chercherons approximativement des intégrales irrégulières en étudiant les caractéristiques au point de vue de la propagation des discontinuités. Les problèmes que nous aurons à résoudre auront pour solution des espèces de polyèdres où les faces seraient des intégrales régulières et les arêtes, des caractéristiques d'un ou de plusieurs systèmes.

§1. Equation linéaire du premier ordre.

13 Caractéristique d'intersection. Soit l'équation:

$$Ap + Bq = C \qquad (1)$$

où A, B, C sont des fonctions uniformes de x, y, z débarassées de tout facteur commun. Donnons-nous une courbe initiale régulière AB dans le plan des yz, nous déterminerons une surface régulière S, intégrale de l'équation (1). Donnons-nous une seconde courbe AC, nous trouverons une seconde surface intégrale S' coupant la première suivant une courbe AD. En un point M de cette courbe, on a:



$$dz = p\,dx + q\,dy \qquad (2)$$

En considérant successivement les deux surfaces, on voit que les équations (1) et (2) sont satisfaites par deux

deux systèmes de valeurs de p et q ; comme ces équations sont linéaires, elles doivent être indéterminées ; on a donc

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{dz}{C} \qquad (3)$$

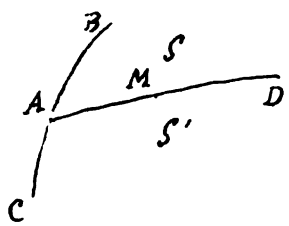
Ces équations définissent une Congruence de courbes ; on démontre que par tout point de l'espace on peut faire passer une courbe et une seule satisfaisant aux équations (3). Toute courbe peut être considérée comme une surface dégénérée ; on peut la considérer comme limite d'une surface tubulaire dont la section a pour limite un point ; le plan tangent à cette surface dégénérée est un plan mené arbitrairement par la tangente à la courbe. A ce point de vue toute courbe satisfaisant à l'équation (3) est une surface intégrale, car un plan tangent à la courbe satisfait à l'équation :

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

qui à cause des équations (3) devient l'équation (4).
Il résulte de là que les deux surfaces S et S' et leur ligne d'intersection AD constituent une intégrale irrégulière ; en tout point de S, de S' ou de AD l'équation est satisfaite.
Si on se donne une directrice EF régulière ou non, curviligne ou polygonale, on obtiendra une surface intégrale en menant des caractéristiques par tous les points de la directrice. On démontre, en effet, que les intégrales des équations (3) sont continues par rapport aux constantes ; la courbe MD engendre donc une surface continue dès que la directrice EF est continue. Mais il peut y avoir des discontinuités dans les dérivées premières ou d'ordre supérieur ; ces discontinuités se propagent

suivant certaines caractéristiques qui divisent la surface en bandeaux réguliers. L'équation proposée est satisfaite en chaque point de cette surface, car tout plan tangent est tangent à une caractéristique et nous venons de démontrer qu'alors l'équation est satisfaite.

14. Variation du plan tangent. Caractéristique du premier ordre.



Si le point initial A d'une caractéristique se déplace infiniment peu, on démontre aisément que tout autre point se déplace, en général, d'une quantité du même ordre. Si en A on imagine deux directrices ayant mêmes dérivées d'ordre n et inférieur, les dérivées de cet ordre restent les mêmes pour les deux surfaces le long de la caractéristique. Connaissant ces dérivées en A, on peut donc les déterminer en un point quelconque. La ligne AD et l'ensemble des dérivées d'ordre égal ou inférieur à n constituent une caractéristique d'ordre n. Si on suppose d'abord AD quelconque, on peut calculer par les équations différentielles de la courbe et l'équation proposée, toutes les dérivées le long de AD ; on trouvera la caractéristique du $n^{ième}$ ordre en exprimant que les dérivées d'ordre $n+1$ sont indéterminées.

Proposons-nous de trouver la caractéristique du premier ordre. Supposons connus x, y, z, p, q le long de AD et calculons les dérivées secondes r, s, t. Posons :

$$Ap + Bq - C = F = 0 \qquad (1)$$

On a :

$$Ar + Bs + \left(\frac{dF}{dx}\right) = 0 \qquad (4)$$

où l'on a :

$$\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} p$$

On a aussi :

$$dp = r\,dx + s\,dy \qquad (5)$$

Exprimons que les équations (4) et (5) en r et s sont indéterminées, on a :

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{-dp}{\left(\frac{dF}{dx}\right)}$$

Si on avait pris la dérivée de F par rapport à y et la valeur de dq, le dernier rapport eut été :

$$-\frac{dq}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}$$

Enfin on a :

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{p\,dx + q\,dy}{Ap + Bq} = \frac{dz}{C}$$

On peut donc écrire :

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{dz}{C} = \frac{-dp}{\left(\frac{dF}{dx}\right)} = \frac{-dq}{\left(\frac{dF}{dy}\right)} \qquad (6)$$

La caractéristique du premier ordre comprend la caractéristique d'intersection ou d'ordre zéro et l'ensemble des plans tangents.

Soit à calculer la fonction p. Nous supposerons connue la caractéristique d'ordre zéro : y et z sont des fonctions connues de x. On tire des équations (6)

$$-A\frac{dp}{dx} = \left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{\partial A}{\partial x}p + \frac{\partial B}{\partial x}q - \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial z}p^2 + \frac{\partial B}{\partial z}pq - \frac{\partial C}{\partial z}p$$

Or

$$Ap + Bq = C$$

En éliminant q, on trouve :

$$\frac{dp}{dx} = \alpha p^2 + \beta p + \gamma. \qquad (7)$$

$$\alpha = \frac{A\frac{\partial B}{\partial z} - B\frac{\partial A}{\partial z}}{AB} = \frac{\frac{\partial B}{\partial z}}{A} - \frac{\frac{\partial A}{\partial z}}{A}$$

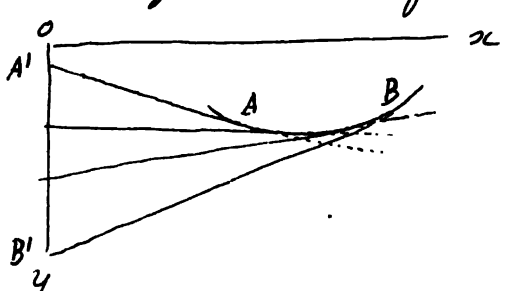
15 Contour apparent. Reprenons les equations (1) ou (2) où nous supposerons d'abord que dx, dy, dz appartiennent à une courbe quelconque. Nous obtiendrons le contour apparent de la surface, en projection sur le plan des xy, en exprimant que p et q sont infinis ; on obtient :

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} \gtrless \frac{dz}{C} \qquad (8)$$

Il manque une équation pour déterminer la courbe ; nous écrivons :

$$z = \varphi(x) \qquad (9)$$

φ désignant une fonction arbitraire.



Soit AB une courbe de l'espèce représentée en projection sur le plan des xy. Cette courbe n'est pas une caractéristique ; on peut donc faire passer des caractéristiques par tous les points et l'on obtiendra une surface intégrale. Comme le contour apparent dépend d'une fonction arbitraire, il semble même qu'on puisse obtenir toutes les intégrales de cette façon. Il faut remarquer cependant que le contour apparent peut devenir imaginaire ou se transporter à l'infini.

Si on trace les caractéristiques en projection horizontale, on trouve des courbes tangentes à la courbe AB ; l'équation (8)

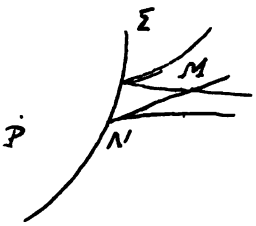
donne en effet la même valeur de $\frac{dy}{dx}$ que pour la caractéristique ; dans l'espace les courbes ne sont pas tangentes. Au lieu de nous donner la courbe AB, donnons-nous la courbe initiale A'B' dans le plan des yz et intégrons graphiquement les équations des caractéristiques. Si ces caractéristiques se coupent en projection horizontale, leur enveloppe déterminera le contour apparent. En effet en un point B, on trouve dans l'espace deux tangentes à la surface intégrale en menant les tangentes au contour apparent et à la caractéristique ; comme ces deux tangentes ont même projection sur le plan des xy, elles déterminent un plan tangent normal à ce plan des xy. Le raisonnement serait en défaut, si les deux tangentes coïncidaient aussi dans l'espace, mais alors la courbe AB satisferait aux équations de la caractéristique ; par chacun de ses points, il passerait deux intégrales des équations de la caractéristique ce qui n'est pas possible dans le cas où A, B, C sont uniformes.

On peut aussi demander de déterminer analytiquement le point où une caractéristique A'A coupe le contour apparent. Si l'on ne donne que la caractéristique A'A, le problème est indéterminé, car on peut tracer AB à partir d'un point initial quelconque. Mais si on donne p_0 en A', on trouvera la variation de p par l'équation (7) et en cherchant le point où p devient infini, le problème sera résolu.

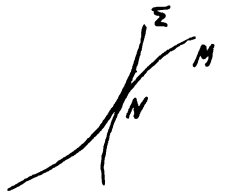
La détermination du contour apparent peut avoir une grande importance, dans certains problèmes utiles. S'il s'agit de trouver une surface qui limite

supérieurement un liquide, l'existence d'un contour apparent prouvera qu'on se trouve en présence d'une solution théorique physiquement impossible. C'est ainsi, par exemple, que le mascaret se produit, quand la surface hydraulique continue présente un contour apparent.

16 Cas plus général. Il peut se faire que les fonctions A, B, C contiennent un ou plusieurs radicaux ; c'est ce qui arrivera quand l'équation linéaire proviendra de la décomposition d'une équation du second degré ou de degré supérieur. Tout ce qui précède est encore applicable si on donne une signification déterminée aux radicaux ; mais il faut exclure les points où les racines deviennent égales ; dans le voisinage de ces points, il se présente des singularités que nous exposerons succinctement. Soit Σ le lieu des points



où un radical s'annule ; en M on trouvera deux caractéristiques ; en N les racines sont égales ; en P elles sont imaginaires. La caractéristique MN ne peut dépasser Σ et forme un rebroussement. Il peut cependant que la caractéristique touche la surface Σ ;



alors la surface Σ est une solution singulière ; c'est la surface focale de la congruence des caractéristiques. Il nous semble regrettable que l'on ait employé le même mot « linéaire » pour désigner des équations d'espèces bien différentes ; les unes n'ayant jamais de solution singulière, les autres présentant les mêmes propriétés que les équations de forme quelconque.

§2. Equation du premier ordre de forme quelconque.

17 Caractéristique du premier ordre. Soit l'équation:

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \qquad (1)$$

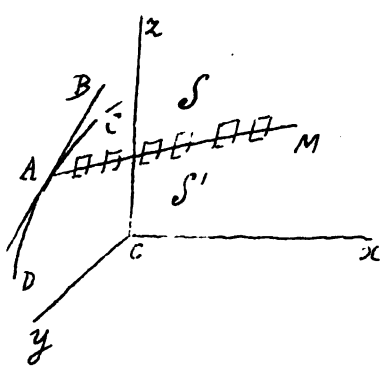
Prenons d'abord comme ligne initiale, une droite AB du plan des yz:

$$z = ay + b, \qquad x = 0$$

(On pourrait prendre une courbe quelconque à deux paramètres). On obtiendra une intégrale de la forme

$$f(x, y, z, a, b) = 0$$

qui contient deux paramètres et qui est appelée intégrale complète. Si la droite AB enveloppe une courbe AC, l'intégrale complète enveloppera une surface S qui est aussi une intégrale car tout plan tangent à l'enveloppe touche une surface enveloppée et satisfait à l'équation proposée. Cette surface S est un lieu de caractéristiques.



Si on prolonge CA par une autre courbe AD telle qu'en A il y ait contact du premier ordre, mais des discontinuités dans les dérivées d'ordre supérieur au premier, on trouvera une autre surface S', mais il est facile de voir que les deux surfaces se raccordent le long d'une caractéristique commune AM. En effet, les équations de la caractéristique sont

$$f'(x, y, z, a, b) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{db}{da} = 0$$

Le point caractéristique de la droite AB est déterminé par:

$$y + \frac{db}{da} = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{db}{da} = -y$$

Au point A, on trouve la même caractéristique pour les deux surfaces, car a, b, $\frac{db}{da}$ sont les mêmes dans les deux cas. Les plans tangents le long de cette caractéristiques se confondent, car ce sont les plans tangents à la même enveloppée.

Pour obtenir toutes les surfaces intégrales qui ont même plan tangent en A il suffit de prendre la courbe AD arbitrairement mais tangente en A à la droite AB; donc toutes ces surfaces ont une ligne commune AM et les plans tangents communs suivant cette ligne. C'est cette suite d'éléments qui constitue la caractéristique du premier ordre de l'équation proposée. Nous voyons aussi que l'on peut former une surface intégrale irrégulière au moyen des deux surfaces S et S'; c'est suivant la caractéristique commune que se propagent les discontinuités dans les dérivées supérieures au premier ordre.

Nous obtiendrons les équations différentielles de la caractéristique du premier ordre en suivant la méthode déja employée au numéro 14.. Supposons d'abord que dx, dy, dz s'appliquent à une courbe quelconque d'une surface intégrale. On peut calculer p et q par l'équation (1) et l'équation:

$$dz = p\,dx + q\,dy \qquad (2)$$

Ces équations ne sont jamais indéterminées si l'équation (1) ne se décompose pas en équations linéaires.

Il n'y a donc pas de caractéristique d'ordre zéro. Nous pouvons ensuite calculer les dérivées secondes r, s, t ; on obtiendra la caractéristique du premier ordre en exprimant que ces dérivées secondes sont indéterminées. Posons :

$$dF = P\,dp + Q\,dq + X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

En prenant la dérivée par rapport à x, on a :

$$Pr + Qs + X + Zp = 0 \qquad (3)$$

On a aussi

$$dp = r\,dx + s\,dy \qquad (4)$$

Les valeurs de r, s sont indéterminées si l'on a :

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{-dp}{X + Zp}$$

Si nous avions pris les dérivées par rapport à y, nous aurions trouvé

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{-dp}{Y + Zq}$$

On a aussi

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{p\,dx + q\,dy}{Pp + Qq} = \frac{dz}{Pp + Qq}$$

On a finalement les équations de la caractéristique :

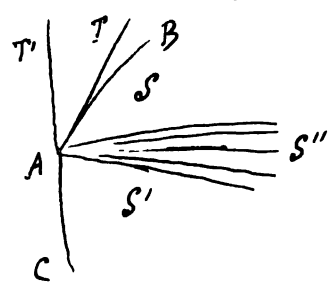
$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{-dp}{X + Zp} = \frac{-dq}{Y + Zq} \qquad (5)$$

Deux de ces équations peuvent être remplacées par (1) ou (2). Nous avons démontré plus haut la génération des surfaces intégrales par les caractéristiques ; les équations (5) déterminent ces caractéristiques. De la courbe initiale au moyen des équations (1) et (2) on déduit x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 et on trouve par les équations (5) y, z, p, q en fonction de x. On peut d'ailleurs démontrer analytiquement

(démonstration de Cauchy) que si la fonction initiale est continue et sa dérivée, la caractéristique engendre une surface continue, dont les plans tangents sont déterminés par les coefficients p et q et qui satisfait à l'équation proposée.

Pour intégrer graphiquement les equations de la caractéristique, on prend, par exemple, x comme variable indépendante, on représente les fonctions y, z, p, q par des courbes que l'on détermine par tangentes successives; on peut ensuite augmenter l'approximation, en utilisant les quadratures approchées. On déterminera la surface intégrale en construisant des caractéristiques suffisamment rapprochées.

Si la courbe initiale est formée d'arcs réguliers tangents l'un à l'autre, on trouve une surface intégrale formée de bandeaux réguliers séparés par les caractéristiques; les discontinuités dans les dérivées d'ordre supérieur au premier se propagent suivant ces caractéristiques.



Si la courbe initiale présente un angle curviligne BAC, on trouvera une surface S pour AB, une surface S' pour AC; mais on ne peut pas prolonger ces surfaces jusqu'à leur intersection; car cette intersection n'est pas une intégrale comme cela se présente dans les équations linéaires. On doit faire tourner la tangente AT de l'arc AB jusqu'en AT' tangente à AC. Pour chaque position intermédiaire on trouve une valeur de p_0, q_0,

et une caractéristique. Cette caractéristique engendrera une surface pseudo-conique S'' qui servira de raccordement entre les surfaces S et S'.

18. Courbe intégrale ou arête de rebroussement. Reprenons les équations (3) et (4), et supposons d'abord que dx, dy, dz s'appliquent à une courbe quelconque. Supposons que z, p, q sont connus le long de cette courbe; nous trouverons:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}$$

Nous y joindrons les équations (1) et (2); nous aurons ainsi trois équations pour déterminer les quatre fonctions y, z, p, q; il faudra donc y ajouter une équation arbitraire

$$z = \varphi(x)$$

Toute courbe ainsi déterminée est appelée Courbe intégrale. En tenant compte de l'équation (2), on a:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} \qquad (6)$$

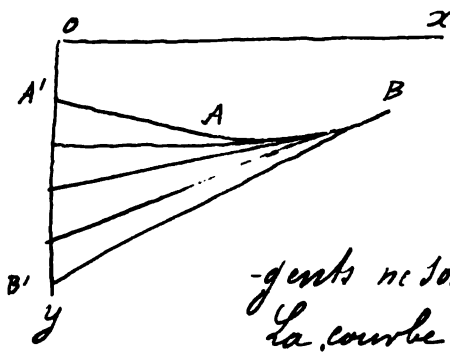
En y ajoutant:

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \qquad (1)$$

$$z = \varphi(x) \qquad (7)$$

on obtient toutes les équations de la courbe intégrale. Si nous prenons une courbe intégrale comme courbe initiale, nous engendrerons une surface intégrale par les caractéristiques. On voit par les équations (6) comparées aux équations (5) que les dx, dy, dz en un point, sont les mêmes pour la courbe intégrale que pour la caractéristique; donc les caractéristiques

touchent la courbe intégrale. En projection sur le plan des xy



les caractéristiques enveloppent aussi la courbe intégrale qui sépare la nappe visible de la nappe invisible; mais d'après l'équation (7) les plans tangents ne sont pas normaux au plan des xy, en général.

La courbe AB de l'espace est une arête de rebroussement. Si au lieu de représenter z, on représentait p ou q par une surface, la courbe AB serait un contour apparent, car r, s, t sont infinis.

Connaissant une intégrale complète, on peut trouver l'intégrale générale par la théorie des enveloppes. Monge a aussi écrit les équations de l'enveloppe des caractéristiques; cette enveloppe est la courbe intégrale ou l'arête de rebroussement.

Si on se donne une courbe initiale quelconque A'B' et si les caractéristiques enveloppent une courbe en projection sur le plan des xy, cette courbe peut être un contour apparent de la surface z ou de la surface p ou q; dans ce dernier cas, c'est l'arête de rebroussement.

19 Singularités. Si on élimine p et q entre les équations:

$$F = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial p} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial q} = 0 \qquad (8)$$

on obtient une surface qui est le lieu des points de rebroussements des caractéristiques ou une solution singulière (Voir le Mémoire de M. Darboux, Savants étrangers, tome XXVII)

On peut aussi généraliser (pour 3 ou n dimensions) les propriétés relatives aux équations différentielles

ordinaires, que nous avons exposées précédemment (x).

1° Si dans l'équation aux dérivées partielles, on considère p et q comme des paramètres, on obtient une famille de surfaces à deux paramètres.; ces surfaces sont les surfaces isoclines; elles ont pour enveloppe la surface représentée par les équations (8).

2° Le point de cet enveloppe où les paramètres p et q sont précisément les coefficients du plan tangent commun à l'enveloppe et à l'enveloppé est un point extra-singulier; les caractéristiques se disposent dans les environs de ce point comme dans le cas d'une équation différentielle ordinaire.

3° Si tous les points de l'enveloppe satisfont à la condition du point extra-singulier, l'enveloppe est une solution singulière; elle est aussi l'enveloppe des intégrales.

4° Si on prend comme intégrale complète une sphère de rayon r, touchant une sphère de rayon R, les surfaces isoclines sont des sphères de rayon $r' = R - r$. Il y a réciprocité; les sphères de rayon r' deviennent des intégrales quand les sphères de rayon r deviennent les surfaces isoclines. L'équation aux dérivées partielles est:

$$\left(x + \frac{rp}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)^2 + \left(y + \frac{rq}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)^2 + \left(z - \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)^2 = r'^2$$

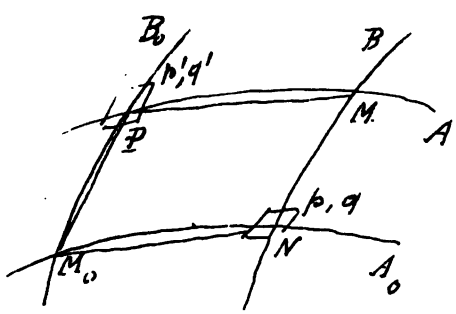
L'intégrale complète s'obtient en échangeant r et r' et en remplaçant p et q par des constantes.

(x) Mémoire sur l'intégraphique, Numéros 717 et suivants. Annales des ingénieurs S. d. l'E. du G. c. de Gand; année 1886-1887. Cités à Paris. Gauthier-Villars 1887.

$$\left(x+\frac{z'\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}}\right)^2+\left(y+\frac{z'\beta}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}}\right)^2+\left(z-\frac{z'}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}}\right)^2=z^2$$

L'intégration rappelle l'équation de Clairaut surtout quand $r=z'$.

5° Prenons pour intégrale complète les positions d'une surface invariable A à laquelle on donne un mouvement de translation qui fait décrire à tous les points de cette surface des surfaces B égales et parallèles. A ces surfaces B sont les surfaces isoclines et il y a réciprocité. L'enveloppe commune des surfaces A et B est la solution singulière.



Soient A_0, B_0 deux de ces surfaces ayant respectivement pour équations:

B_0 $\quad F(x_0, y_0, z_0)=0$

A_0 $\quad F_1(x_0, y_0, z_0)=0$

Au moyen de l'équation de A_0, on tire:

$$\overline{M_0N}=\bar{f}(p,q)=\bar{u}_x f_1(p,q)+\cdots$$

La surface isocline B est le lieu du point M tel que

$$\overline{PM}=\overline{M_0N} \quad ; \quad P \text{ décrivant } B;$$

son équation est:

$$F\left(x-f_1(p,q),\ y-f_2(p,q),\ z-f_3(p,q)\right)=0$$

C'est l'équation aux dérivées partielles; les fonctions f_1 f_2 f_3 satisfont à:

$$df_3=p\,df_1+q\,df_2$$

On trouve les intégrales complètes en faisant varier p et q et cherchant pour P fixe le lieu du point M; on trouve:

$$x=x_0+f_1(p,q),\ y=y_0+f_2(p,q),\ z=z_0+f_3(p,q)$$

Entre les trois constantes x_0, y_0, z_0 on a la relation

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Par raison de réciprocité, on peut aussi mettre l'équation de l'intégrale A sous la même forme que celle de la surface B ; on pose :

$$\overline{NM} = \overline{M_0 P} = \overline{\varphi}(p', q') = \overline{u}_x \varphi_1(p', q') + \dots$$

et l'équation de A est :

$$F_1\big(x - \varphi_1(p', q'),\ y - \varphi_2(p', q'),\ z - \varphi_3(p', q')\big) = 0$$

où p', q' sont des constantes. L'intégration rappelle encore l'équation de Clairaut surtout quand F et F_1 sont identiques.

6° Dans le plan le rayon de courbure de la solution singulière est la somme algébrique des rayons de courbure de l'intégrale et de la courbe isocline qui ont un point commun sur la solution singulière. Dans l'espace les indicatrices de la solution singulière, de la surface isocline et de l'intégrale qui ont un seul élément commun ont deux diamètres conjugués de même direction et pour les sections faites suivant ces diamètres, on a la même relation entre les rayons de courbure que dans le plan.

§ 3. Equation linéaire du second ordre.

20. Caractéristiques du premier ordre. Soit l'équation :

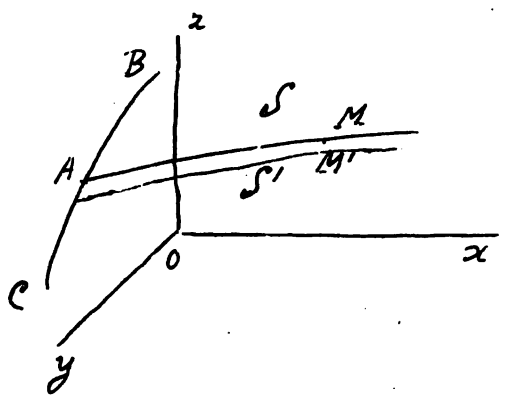
$$R r + S s + T t = V \qquad (1)$$

R, S, T, V étant des fonctions régulières de x, y, z, p, q. Donnons-nous comme conditions initiales une courbe régulière AB du plan des yz et les plans tangents le

long de cette courbe ; cela revient à donner :

pour $x = 0$, les fonctions régulières z_0 et p_0.

D'après le théorème de l'intégrale générale, on déterminera ainsi une intégrale régulière S.



Voyons s'il est possible d'introduire en A des discontinuités dans les dérivées secondes de manière à obtenir une nouvelle surface intégrale S' se raccordant avec S suivant une caractéristique du premier ordre AM.

Considérons d'abord la multiplicité d'éléments AM (points et plans tangents) comme choisie arbitrairement. Nous pourrons calculer en un point quelconque M toutes les dérivées. Nous obtiendrons la caractéristique du premier ordre en exprimant que les dérivées secondes sont indéterminées. Si dx, dy, dz, dp, dq appartiennent à la courbe AM, on trouvera r, s, t par les équations :

$$\left.\begin{aligned} R\,r + S\,s + T\,t &= U \\ r\,dx + s\,dy &= dp \\ s\,dx + t\,dy &= dq \end{aligned}\right\} \quad \ldots (2)$$

Nous exprimerons que r, s, t sont indéterminés en égalant à zéro les déterminants de la matrice

$$\begin{vmatrix} R & S & T & U \\ dx & dy & 0 & dp \\ 0 & dx & dy & dq \end{vmatrix} = 0$$

On sait que les équations se réduisent à deux ; on

prenant les trois premières colonnes, puis en supprimant la seconde, on trouve :

$$R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 = 0 \qquad (3)$$

$$R\,dp\,dy + T\,dq\,dx = V\,dx\,dy \qquad (4)$$

On peut aussi exprimer que les équations (2) se ramènent à deux d'entre elles par la méthode des coefficients indéterminés. En multipliant la seconde et la troisième respectivement par α et β et ajoutant, on doit pouvoir trouver la première ; on a donc :

$$\alpha\,dx = R\,,\quad \beta\,dy = T\,,\quad \alpha\,dy + \beta\,dx = S\,,\quad \alpha\,dp + \beta\,dq = V$$

En tirant α, β des deux premières, les deux autres deviennent les équations (3) et (4).
De l'équation (3), on tire :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4RT}}{2R}$$

On a donc deux systèmes de caractéristiques :

$$\frac{dy}{dx} = \lambda \qquad \frac{\delta y}{\delta x} = \mu$$

Pour le premier système l'équation (4) devient :

$$R\lambda\,dp + T\,dq = V\lambda\,dx$$

En divisant par $R\lambda\,dx$ et remarquant que

$$\lambda\mu = \frac{T}{R}$$

on trouve :

$$\frac{dp}{dx} + \mu\,\frac{dq}{dx} = \frac{V}{R}$$

On a aussi :

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

On n'a que 3 équations pour déterminer les fonctions y, z, p, q ; il faut donc y ajouter une équation arbitraire, telle que

$$z = \varphi(x)$$

Finalement les équations de la caractéristique du premier système sont :

$$\left.\begin{aligned} dy &= \lambda\,dx \quad , \qquad dz = p\,dx + q\,dy \\ \frac{dp}{dx} &+ \mu\,\frac{dq}{dx} = \frac{U}{R} \quad , \qquad z = \varphi(x) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

On trouve de même que les équations de la caractéristique du second système est :

$$\left.\begin{aligned} \delta y &= \mu\,\delta x \quad , \qquad \delta z = p\,\delta x + q\,\delta y \\ \frac{\delta p}{\delta x} &+ \lambda\,\frac{\delta q}{\delta x} = \frac{U}{R} \quad , \qquad z = \varphi_1(x) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Si on connaît l'intégrale régulière S, on pourra calculer z, p, q, λ ou μ en fonction de x, y et l'on trouve les caractéristiques en intégrant les équations différentielles ordinaires :

$$dy = \lambda\,dx \qquad \delta y = \mu\,\delta x$$

Les autres équations des caractéristiques seront satisfaites ; ainsi la seconde des équations (5) est évidente ; il en est de même des équations (2) et par conséquent de l'équation (4) qui en est une conséquence quand l'équation (3) est satisfaite. Il résulte de là que la fonction φ ou φ_1 dépend du point initial de la caractéristique et des deux fonctions arbitraires qui déter-

-minent l'intégrale régulière.

Cas particulier. Caractéristique d'ordre zéro. Supposons que la valeur de λ soit indépendante de p et q ; on obtiendra une caractéristique d'ordre zéro par les équations :

$$dy = \lambda\, dx \quad , \qquad z = \varphi(x)$$

Pour la même courbe, on peut faire varier p_0 au point initial et obtenir une infinité de multiplicités de plans tangents. Il est facile de voir qu'à un certain point de vue, cette courbe peut être considérée comme une surface dégénérée satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles. Si on considère la courbe comme la limite d'une surface tubulaire à section infiniment petite, on aura évidemment :

$$r\,,\ s\,,\ t = \infty$$

Introduisons les rapports :

$$r' = \frac{r}{s} \quad , \qquad t' = \frac{t}{s}$$

Divisons l'équation aux dérivées partielles par s, cette équation sera satisfaite, si l'on a :

$$R r' + S + T t' = 0$$

Or, en suivant la courbe, on a :

$$dp = s\,(r'\,dx + dy) \quad , \quad dq = s\,(dx + t'\,dy)$$

et comme dp et dq sont indéterminés, on a :

$$r'\,dx + dy = 0 \qquad dx + t'\,dy = 0$$

Portons ces valeurs de r' et de t' dans l'équation

transformée ; nous aurons :

$$R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 = 0 \qquad (3)$$

équation qui est satisfaite.

Il n'y a pas d'autres intégrales de cette espèce, car si on se donne la courbe, on tire comme plus haut x' et t' et en exprimant que l'équation aux dérivées partielles est satisfaite, on retrouve l'équation (3) des caractéristiques.

Dans ce qui suit nous considérerons le cas général ; nous formerons des intégrales irrégulières au moyen d'intégrales régulières raccordées entre elles ; si on se trouvait dans le cas particulier que nous venons d'examiner, on pourrait réunir des intégrales régulières se comptant suivant des caractéristiques d'intersection.

21. Cas d'un seul système de lignes de discontinuités. Supposons qu'il n'existe aucune dépendance entre les fonctions arbitraires qui déterminent les intégrales. Soit S' ; traçons la caractéristique du premier système en partant de A sur la surface S ; elle satisfera aux équations (5) et la fonction φ dépend de deux fonctions arbitraires qui déterminent S. Si nous traçons la même caractéristique sur la surface S' elle ne coïncide pas avec la première, car la fonction φ sera différente. En d'autres termes, la caractéristique AM a été trouvée en la rendant aussi indépendante que possible des fonctions arbitraires ; mais elle ne l'est pas complètement. Elle n'est pas commune à toutes les intégrales qui se touchent en A, comme dans les équations du premier

§2. Equation du premier ordre de forme quelconque.

17 Caractéristique du premier ordre. Soit l'équation:

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \qquad (1)$$

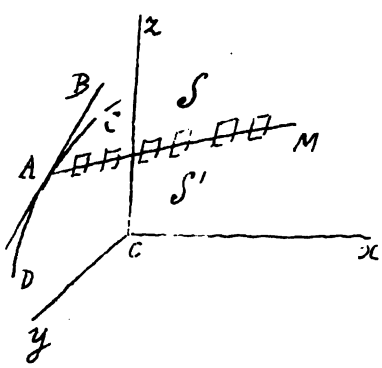
Prenons d'abord comme ligne initiale, une droite AB du plan des yz:

$$z = ay + b, \qquad x = 0$$

(On pourrait prendre une courbe quelconque à deux paramètres). On obtiendra une intégrale de la forme

$$f(x, y, z, a, b) = 0$$

qui contient deux paramètres et qui est appelée intégrale complète. Si la droite AB enveloppe une courbe AC, l'intégrale complète enveloppera une surface S qui est aussi une intégrale car tout plan tangent à l'enveloppe touche une int. enveloppée et satisfait à l'équation proposée. Cette surface S est un lieu de caractéristiques.



Si on prolonge CA par une autre courbe AD telle qu'en A il y ait contact du premier ordre, mais des discontinuités dans les dérivées d'ordre supérieur au premier, on trouvera un autre surface S', mais il est facile de voir que les deux surfaces se raccordent le long d'une caractéristique commune AM. En effet, les équations de la caractéristique sont

$$f'(x, y, z, a, b) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}\,\frac{db}{da} = 0$$

Le point caractéristique de la droite AB est déterminé par:

$$y + \frac{db}{da} = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{db}{da} = -y$$

Au point A, on trouve la même caractéristique pour les deux surfaces, car a, b, $\frac{db}{da}$ sont les mêmes dans les deux cas. Les plans tangents le long de cette caractéristiques se confondent, car ce sont les plans tangents à la même enveloppée.

Pour obtenir toutes les surfaces intégrales qui ont même plan tangent en A il suffit de prendre la courbe AD arbitrairement mais tangente en A à la droite AB; donc toutes ces surfaces ont une ligne commune AM et les plans tangents communs suivant cette ligne. C'est cette suite d'éléments qui constitue la caractéristique du premier ordre de l'équation proposée. Nous voyons aussi que l'on peut former une surface intégrale irrégulière au moyen des deux surfaces S et S'; c'est suivant la caractéristique commune que se propagent les discontinuités dans les dérivées supérieures au premier ordre.

Nous obtiendrons les équations différentielles de la caractéristique du premier ordre en suivant la méthode déja employée au numéro 14.. Supposons d'abord que dx, dy, dz s'appliquent à une courbe quelconque d'une surface intégrale. On peut calculer p et q par l'équation (1) et l'équation:

$$dz = p\,dx + q\,dy \qquad (2)$$

Ces équations ne sont jamais indéterminées si l'équation (1) ne se décompose pas en équations linéaires.

Il n'y a donc pas de caractéristique d'ordre zéro. Nous pouvons ensuite calculer les dérivées secondes r, s, t ; on obtiendra la caractéristique du premier ordre en exprimant que ces dérivées secondes sont indéterminées. Posons :

$$dF = P\,dp + Q\,dq + X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

En prenant la dérivée par rapport à x, on a :

$$Pr + Qs + X + Zp = 0 \qquad (3)$$

On a aussi

$$dp = r\,dx + s\,dy \qquad (4)$$

Les valeurs de r, s sont indéterminées si l'on a :

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{-dp}{X + Zp}$$

Si nous avions pris les dérivées par rapport à y, nous aurions trouvé

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{-dp}{Y + Zq}$$

On a aussi

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{p\,dx + q\,dy}{Pp + Qq} = \frac{dz}{Pp + Qq}$$

On a finalement les équations de la caractéristique :

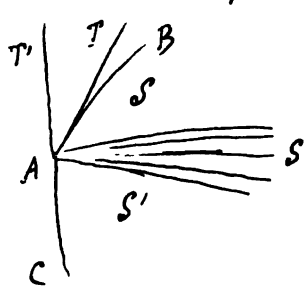
$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{-dp}{X + Zp} = \frac{-dq}{Y + Zq} \qquad (5)$$

Deux de ces équations peuvent être remplacées par (1) ou (2). Nous avons démontré plus haut la génération des surfaces intégrales par les caractéristiques ; les équations (5) déterminent ces caractéristiques. De la courbe initiale au moyen des équations (1) et (2) on déduit x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 et on trouve par les équations (5) y, z, p, q en fonction de x. On peut d'ailleurs démontrer analytiquement

(démonstration de Cauchy) que si la fonction initiale est continue et sa dérivée, la caractéristique engendre une surface continue, dont les plans tangents sont déterminés par les coefficients p et q et qui satisfait à l'équation proposée.

Pour intégrer graphiquement les equations de la caractéristique, on prend, par exemple, x comme variable indépendante, on représente les fonctions y, z, p, q par des courbes que l'on détermine par tangentes successives; on peut ensuite augmenter l'approximation, en utilisant les quadratures approchées. On déterminera la surface intégrale en construisant des caractéristiques suffisamment rapprochées.

Si la courbe initiale est formée d'arcs réguliers tangents l'un à l'autre, on trouve une surface intégrale formée de bandeaux réguliers séparés par les caractéristiques; les discontinuités dans les dérivées d'ordre supérieur au premier se propagent suivant ces caractéristiques.



Si la courbe initiale présente un angle curviligne BAC, on trouvera une surface S pour AB, une surface S' pour AC; mais on ne peut pas prolonger ces surfaces jusqu'à leur intersection; car cette intersection n'est pas une intégrale comme cela se présente dans les équations linéaires. On doit faire tourner la tangente AT de l'arc AB jusqu'en AT' tangente à AC. Pour chaque position intermédiaire on trouve une valeur de p_0, q_0,

et une caractéristique. Cette caractéristique engendrera une surface pseudo-conique S'' qui servira de raccordement entre les surfaces S et S'.

18. Courbe intégrale ou arête de rebroussement. Reprenons les équations (3) et (4), et supposons d'abord que dx, dy, dz s'appliquent à une courbe quelconque. Exprimons que z, p, q sont infinis le long de cette courbe; nous trouverons:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}$$

Nous y joindrons les équations (1) et (2); nous aurons ainsi trois équations pour déterminer les quatre fonctions y, z, p, q; il faudra donc y ajouter une équation arbitraire

$$z = \varphi(x)$$

Toute courbe ainsi déterminée est appelée Courbe intégrale. En tenant compte de l'équation (2), on a:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} \qquad (6)$$

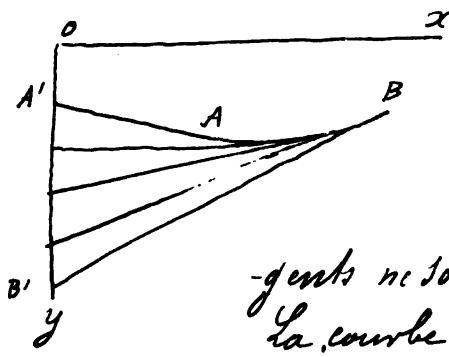
En y ajoutant:

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \qquad (1)$$

$$z = \varphi(x) \qquad (7)$$

on obtient toutes les équations de la courbe intégrale. Si nous prenons une courbe intégrale comme courbe initiale, nous engendrerons une surface intégrale par les caractéristiques. On voit par les équations (6) comparées aux équations (5) que les dx, dy, dz en un point, sont les mêmes pour la courbe intégrale que pour la caractéristique; donc les caractéristiques

touchent la courbe intégrale. En projection sur le plan des xy



les caractéristiques enveloppent aussi la courbe intégrale qui sépare la nappe visible de la nappe invisible; mais d'après l'équation (7) les plans tangents ne sont pas normaux au plan des xy, en général.

La courbe AB de l'espace est une arête de rebroussement. Si au lieu de représenter z, on représentait p ou q par une surface, la courbe AB serait un contour apparent, car r, s, t sont infinis.

Connaissant une intégrale complète, on peut trouver l'intégrale générale par la théorie des enveloppes. Monge a aussi écrit les équations de l'enveloppe des caractéristiques; cette enveloppe est la courbe intégrale ou l'arête de rebroussement.

Si on se donne une courbe initiale quelconque A'B' et si les caractéristiques enveloppent une courbe en projection sur le plan des xy, cette courbe peut être un contour apparent de la surface z ou de la surface p ou q; dans ce dernier cas, c'est l'arête de rebroussement.

19 Singularités. Si on élimine p et q entre les équations:

$$F = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial p} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial q} = 0 \qquad (8)$$

on obtient une surface qui est le lieu des points de rebroussements des caractéristiques ou une solution singulière (Voir le Mémoire de M. Darboux, Savants étrangers, tome XXVII)

On peut aussi généraliser (pour 3 ou n dimensions) les propriétés relatives aux équations différentielles

ordinaires, que nous avons exposées précédemment (x).

1° Si dans l'équation aux dérivées partielles, on considère p et q comme des paramètres, on obtient une famille de surfaces à deux paramètres. ; ces surfaces sont les surfaces isoclines ; elles ont pour enveloppe la surface représentée par les équations (8).

2° Le point de cet enveloppe où les paramètres p et q sont précisément les coefficients du plan tangent commun à l'enveloppe et à l'enveloppé est un point extra-singulier ; les caractéristiques se disposent dans les environs de ce point comme dans le cas d'une équation différentielle ordinaire.

3° Si tous les points de l'enveloppe satisfont à la condition du point extra-singulier, l'enveloppe est une solution singulière ; elle est aussi l'enveloppe des intégrales.

4° Si on prend comme intégrale complète une sphère de rayon r, touchant une sphère de rayon R, les surfaces isoclines sont des sphères de rayon $r' = R - r$. Il y a réciprocité ; les sphères de rayon r' deviennent des intégrales quand les sphères de rayon r deviennent les surfaces isoclines. L'équation aux dérivées partielles est :

$$\left(x + \frac{rp}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)^2 + \left(y + \frac{rq}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)^2 + \left(z - \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)^2 = r'^2$$

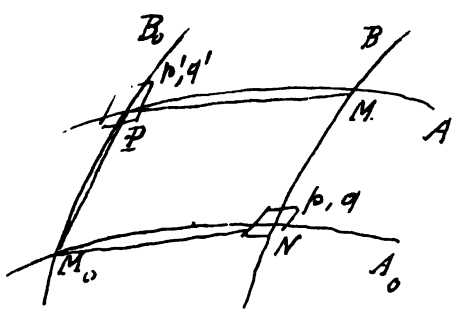
L'intégrale complète s'obtient en échangeant r et r' et en remplaçant p et q par des constantes :

(x) Mémoire sur l'intégraphique, Numéros 717 et suivants.
Annales des ingénieurs S. d. l'E. du G. c. de Gand ; année 1886-1887.
Tirés à part. Gauthier-Villars 1887.

$$\left(x+\frac{z'\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}}\right)^2+\left(y+\frac{z'\beta}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}}\right)^2+\left(z-\frac{z'}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}}\right)^2=z'^2$$

L'intégration rappelle l'équation de Clairaut surtout quand $z=z'$.

5° Prenons pour intégrale complète les positions d'une surface invariable A à laquelle on donne un mouvement de translation qui fait décrire à tous les points de cette surface des surfaces B égales et parallèles. A ces surfaces B sont les surfaces isoclines et il y a réciprocité. L'enveloppe commune des surfaces A et B est la solution singulière.



Soient A_0, B_0 deux de ces surfaces ayant respectivement pour équations:

B_0 $\quad F(x_0, y_0, z_0)=0$

A_0 $\quad F_1(x_0, y_0, z_0)=0$

Au moyen de l'équation de A_0, on tire:

$$\overline{M_0N}=\bar{f}(p,q)=\bar{u}_2 f_1(p,q)+\cdots$$

La surface isocline B est le lieu du point M tel que

$$\overline{PM}=\overline{M_0N} \quad ; \quad P \text{ décrivant } B;$$

son équation est:

$$F\left(x-f_1(p,q),\ y-f_2(p,q),\ z-f_3(p,q)\right)=0$$

C'est l'équation aux dérivées partielles; les fonctions f_1 f_2 f_3 satisfont à:

$$df_3=p\,df_1+q\,df_2$$

On trouve les intégrales complètes en faisant varier p et q et cherchant pour P fixe le lieu du point M; on trouve:

$$x=x_0+f_1(p,q),\ y=y_0+f_2(p,q),\ z=z_0+f_3(p,q)$$

Entre les trois constantes x_0, y_0, z_0 on a la relation

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Par raison de réciprocité, on peut aussi mettre l'équation de l'intégrale A sous la même forme que celle de la surface B ; on pose :

$$\overline{NM} = \overline{M_0 P} = \overline{\varphi}(p', q') = \overline{u}_x \varphi_1(p', q') + \dots$$

et l'équation de A est :

$$F_1\left(x - \varphi_1(p', q'),\ y - \varphi_2(p', q'),\ z - \varphi_3(p', q')\right) = 0$$

où p', q' sont des constantes. L'intégration rappelle encore l'équation de Clairaut surtout quand F et F_1 sont identiques.

6° Dans le plan le rayon de courbure de la solution singulière est la somme algébrique des rayons de courbure de l'intégrale et de la courbe isocline qui ont un point commun sur la solution singulière. Dans l'espace les indicatrices de la solution singulière, de la surface isocline et de l'intégrale qui ont un seul élément commun ont deux diamètres conjugués de même direction et pour les sections faites suivant ces diamètres, on a la même relation entre les rayons de courbure que dans le plan.

§ 3. Equation linéaire du second ordre.

20. Caractéristiques du premier ordre. Soit l'équation :

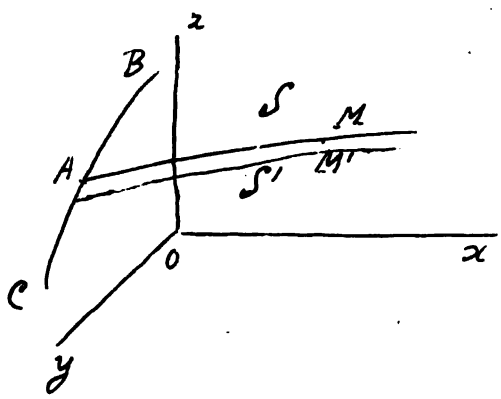
$$R r + S s + T t = V \qquad (1)$$

R, S, T, V étant des fonctions régulières de x, y, z, p, q. Donnons-nous comme conditions initiales une courbe régulière AB du plan des yz et les plans tangents le

long de cette courbe ; cela revient à donner :

pour $x = 0$, les fonctions régulières z_0 et p_0.

D'après le théorème de l'intégrale générale, on déterminera ainsi une intégrale régulière S.



Voyons s'il est possible d'introduire en A des discontinuités dans les dérivées secondes de manière à obtenir une nouvelle surface intégrale S' se raccordant avec S suivant une caractéristique du premier ordre AM.

Considérons d'abord la multiplicité d'éléments AM (points et plans tangents) comme choisie arbitrairement. Nous pourrons calculer en un point quelconque M toutes les dérivées. Nous obtiendrons la caractéristique du premier ordre en exprimant que les dérivées secondes sont indéterminées. Si dx, dy, dz, dp, dq appartiennent à la courbe AM, on trouvera r, s, t par les équations :

$$\left.\begin{aligned} R\,r + S\,s + T\,t &= U \\ r\,dx + s\,dy &= dp \\ s\,dx + t\,dy &= dq \end{aligned}\right\} \quad \ldots (2)$$

Nous exprimerons que r, s, t sont indéterminés en égalant à zéro les déterminants de la matrice

$$\begin{vmatrix} R & S & T & U \\ dx & dy & 0 & dp \\ 0 & dx & dy & dq \end{vmatrix} = 0$$

On sait que les équations se réduisent à deux ; en

prenant les trois premières colonnes, puis en supprimant la seconde, on trouve :

$$R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 = 0 \qquad (3)$$

$$R\,dp\,dy + T\,dq\,dx = V\,dx\,dy \qquad (4)$$

On peut aussi exprimer que les équations (2) se ramènent à deux d'entre elles par la méthode des coefficients indéterminés. En multipliant la seconde et la troisième respectivement par α et β et ajoutant, on doit pouvoir trouver la première ; on a donc :

$$\alpha\,dx = R\,,\quad \beta\,dy = T\,,\quad \alpha\,dy + \beta\,dx = S\,,\quad \alpha\,dp + \beta\,dq = V$$

en tirant α, β des deux premières, les deux autres deviennent les équations (3) et (4).
De l'équation (3), on tire :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4RT}}{2R}$$

On a donc deux systèmes de caractéristiques :

$$\frac{dy}{dx} = \lambda \qquad \frac{\delta y}{\delta x} = \mu$$

Pour le premier système l'équation (4) devient :

$$R\,\lambda\,dp + T\,dq = V\,\lambda\,dx$$

En divisant par $R\,\lambda\,dx$ et remarquant que

$$\lambda\,\mu = \frac{T}{R}$$

on trouve :

$$\frac{dp}{dx} + \mu\,\frac{dq}{dx} = \frac{V}{R}$$

On a aussi :

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

On n'a que 3 équations pour déterminer les fonctions y, z, p, q ; il faut donc y ajouter une équation arbitraire, telle que

$$z = \varphi(x)$$

Finalement les équations de la caractéristique du premier système sont :

$$\left.\begin{aligned} dy &= \lambda\,dx \quad , \qquad dz = p\,dx + q\,dy \\ \frac{dp}{dx} &+ \mu\frac{dq}{dx} = \frac{U}{R} \quad , \qquad z = \varphi(x) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

On trouve de même que les équations de la caractéristique du second système est :

$$\left.\begin{aligned} \delta y &= \mu\,\delta x \quad , \qquad \delta z = p\,\delta x + q\,\delta y \\ \frac{\delta p}{\delta x} &+ \lambda\frac{\delta q}{\delta x} = \frac{U}{R} \quad , \qquad z = \varphi_1(x) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Si on connaît l'intégrale régulière S, on pourra calculer z, p, q, λ ou μ en fonction de x, y et l'on trouve les caractéristiques en intégrant les équations différentielles ordinaires :

$$dy = \lambda\,dx \qquad \delta y = \mu\,\delta x$$

Les autres équations des caractéristiques seront satisfaites ; ainsi la seconde des équations (5) est évidente ; il en est de même des équations (2) et par conséquent de l'équation (4) qui en est une conséquence quand l'équation (3) est satisfaite. Il résulte de là que la fonction φ ou φ_1 dépend du point initial de la caractéristique et des deux fonctions arbitraires qui déter-

-minent l'intégrale régulière.

Cas particulier. Caractéristique d'ordre zéro. Supposons que la valeur de λ soit indépendante de p et q ; on obtiendra une caractéristique d'ordre zéro par les équations :

$$dy = \lambda\, dx \quad , \qquad z = \varphi(x)$$

Pour la même courbe, on peut faire varier p_0 au point initial et obtenir une infinité de multiplicités de plans tangents. Il est facile de voir qu'à un certain point de vue, cette courbe peut être considérée comme une surface dégénérée satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles. Si on considère la courbe comme la limite d'une surface tubulaire à section infiniment petite, on aura évidemment :

$$r\,,\ s\,,\ t = \infty$$

Introduisons les rapports :

$$r' = \frac{r}{s} \quad , \qquad t' = \frac{t}{s}$$

Divisons l'équation aux dérivées partielles par s, cette équation sera satisfaite, si l'on a :

$$R r' + S + T t' = 0$$

Or, en suivant la courbe, on a :

$$dp = s\,(r'dx + dy) \quad , \quad dq = s\,(dx + t'dy)$$

et comme dp et dq sont indéterminés, on a :

$$r'dx + dy = 0 \qquad dx + t'dy = 0$$

Portons ces valeurs de r' et de t' dans l'équation

transformée ; nous aurons :

$$R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 = 0 \qquad (3)$$

équation qui est satisfaite.

Il n'y a pas d'autres intégrales de cette espèce, car si on se donne la courbe, on tire comme plus haut x' et t' et en exprimant que l'équation aux dérivées partielles est satisfaite, on retrouve l'équation (3) des caractéristiques.

Dans ce qui suit nous considérerons le cas général ; nous formerons des intégrales irrégulières au moyen d'intégrales régulières raccordées entre elles ; si on se trouvait dans le cas particulier que nous venons d'examiner, on pourrait réunir des intégrales régulières se comptant suivant des caractéristiques d'intersection.

21. Cas d'un seul système de lignes de discontinuités. Supposons qu'il n'existe aucune dépendance entre les fonctions arbitraires qui déterminent les intégrales. Soit S' ; traçons la caractéristique du premier système en partant de A sur la surface S ; elle satisfera aux équations (5) et la fonction φ dépend de deux fonctions arbitraires qui déterminent S. Si nous traçons la même caractéristique sur la surface S' elle ne coïncide pas avec la première, car la fonction φ sera différente. En d'autres termes, la caractéristique AM a été trouvée en la rendant aussi indépendante que possible des fonctions arbitraires ; mais elle ne l'est pas complètement. Elle n'est pas commune à toutes les intégrales qui se touchent en A, comme dans les équations du premier

ordre. Elle n'est commune qu'aux intégrales qui se touchent en AC pour lesquelles la fonction φ est la même. Si l'on veut que S' se raccorde avec S on doit déterminer S' en se donnant 1° la caractéristique AM ce qui équivaut à se donner une fonction arbitraire 2° une seconde fonction arbitraire telle que la courbe AC. Mais on ne peut plus se donner les plans tangents le long de AC. On peut établir, en effet, le développement en série de l'intégrale S' satisfaisant à ces conditions et y appliquer la méthode des fonctions majorantes pour démontrer que ce développement est convergent et satisfait à l'équation (x)
Nous pouvons donc nous donner la caractéristique AM, et une courbe AC irrégulière mais formée d'arcs réguliers tangents l'un à l'autre ; en appliquant le théorème précédent aux différents arcs, nous démontrerons qu'il existe une intégrale irrégulière, formée de bandeaux réguliers, ayant la courbe irrégulière AC comme courbe initiale. Les caractéristiques qui séparent les bandeaux forment les lignes de discontinuités pour les dérivées d'ordre supérieur au premier.
Cette intégrale peut être engendrée par la caractéristique en prenant la courbe initiale comme courbe directrice. Mais si on appliquait les équations (5) en faisant varier la fonction φ d'une manière arbitraire, le problème ne serait pas résolu. La variation de la fonction φ d'une génératrice à l'autre doit être telle que

---

Goursat. Leçons sur l'intégration des equations aux dérivées partielles du second ordre. tome I. Chapitre IV.

p et q soient les coefficients du plan tangent de la surface ; en d'autres termes il faut que le déplacement élémentaire d'un point M de la caractéristique satisfasse à l'équation

$$\delta z = p\,\delta x + q\,\delta y$$

S'il en est ainsi la surface satisfait à l'équation aux dérivées partielles. En effet, si p et q sont les coefficients du plan tangent à la surface, on a :

$$dp = r\,dx + s\,dy \quad , \quad \frac{dp}{dx} = r + s\lambda$$

$$dq = s\,dx + t\,dy \quad , \quad \frac{dq}{dx} = s + t\lambda$$

La troisième des équations (5) devient :

$$r + s\lambda + \mu(s + t\lambda) = \frac{U}{R}$$

Or

$$\lambda + \mu = \frac{S}{R} \quad , \quad \lambda\mu = \frac{T}{R}$$

On a donc

$$R\,r + S\,s + T\,t = U$$

ce qui démontre que l'équation est satisfaite. On peut déduire de là une construction approchée de la surface ; au point A, on détermine r, s, t en utilisant l'équation de la courbe AC aux différentielles secondes et les deux équations auxquelles se réduisent les équations (2). On en déduit les valeurs de p, q en un point A' de la courbe initiale très-voisin de A ; on détermine la caractéristique A'M' par les équations (5) ; l'équation $z = \varphi(x)$ sera remplacée par la condition que la nouvelle caractéristique se trouve sur la développable engendrée

par les plans tangents le long de AM.

22. Cas de deux systèmes de lignes de discontinuité. Donnons-nous comme conditions initiales une courbe du plan des yz, projetée en ABCD et les plans tangents le long de cette courbe. Supposons que cette multiplicité d'éléments soit divisée en multiplicités régulières AB, BC, CD etc. mais que des discontinuités dans les dérivées d'ordre supérieur au premier existent aux points de jonction. On demande de couvrir une partie du plan des xy au moyen d'une surface unique continue satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles.

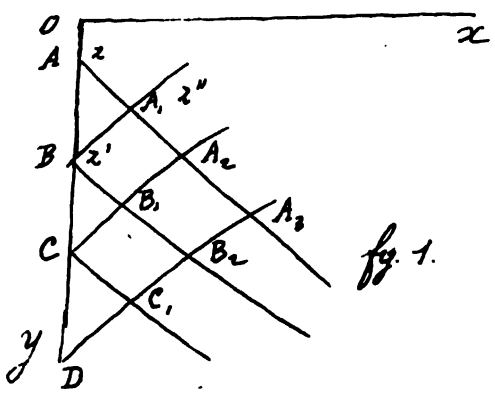


fig. 1.

Le premier arc AB et les plans tangents déterminent une intégrale régulière que nous limiterons aux caractéristiques AA_1, BA_1 de systèmes différents ; nous choisirons les caractéristiques qui font avec AB le plus petit angle. Le second arc BC détermine une intégrale régulière que nous limiterons de même au triangle curviligne BB_1C par deux caractéristiques de systèmes différents. On démontre en analyse (Goursat, loc. cit, p. 194) que deux caractéristiques BA_1 et BB_1 qui ont en B un élément commun déterminent une intégrale régulière. Nous limiterons cette intégrale régulière aux caractéristiques A_1A_2, B_1A_2. L'arc CD détermine le triangle CC_1D et on en déduit les quadrangles $CB_1B_2C_1$, $B_1A_2A_3B_2$ et on continue de même. Il est donc démontré qu'il existe une intégrale irrégulière

satisfaisant aux conditions du problème et cette intégrale est formée de surfaces régulières qui se raccordent suivant des arcs réguliers de caractéristiques du premier ordre.

23. Tracé graphique. Supposons les arcs assez petits pour que les fonctions y, z, p, q soient dans l'étendue de chaque arc représentées par des arcs peu courbes. Au besoin, on subdivisera les arcs AB, BC, CD jusqu'à ce que ces conditions soient satisfaites. On connaît en A: x, y, z, p, q; en B: x', y', z', p', q'; proposons-nous de déterminer approximativement x'', y'', z'', p'', q'' en A_1. Nous aurons d'abord

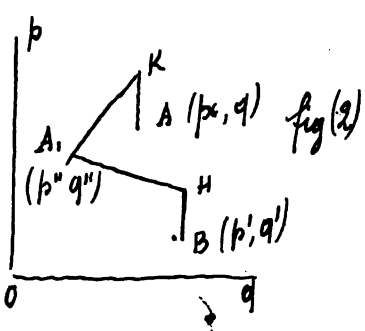
$$\text{pour } AA_1 \qquad dy = \lambda\, dx$$
$$\text{pour } BA_1 \qquad \delta y' = \mu'\, \delta x'$$

Si on remplace les différentielles par des différences, on aura deux équations en x'', y''. Graphiquement on trouve le point A_1 en remplaçant les caractéristiques AA_1 et BA_1 par leurs tangentes en A et B. Nous calculerons alors les valeurs de p'' et q'' au moyen des équations :

$$AA_1 \qquad dp + \mu\, dq = \frac{U}{R}\, dx$$

$$BA_1 \qquad \delta p' + \lambda'\, \delta q' = \frac{U'}{R'}\, \delta x'$$

En remplaçant les différentielles par les différences on a deux équations en $p''\ q''$.



Portons p et q en ordonnées; on trouve le point A. De même $p'\ q'$ détermine le point B. Les équations précédentes représentent deux droites KA_1, HA_1 parallèles aux droites

ordinaires, que nous avons exposées précédemment (x).

1° Si dans l'équation aux dérivées partielles, on considère p et q comme des paramètres, on obtient une famille de surfaces à deux paramètres.; ces surfaces sont les surfaces isoclines; elles ont pour enveloppe la surface représentée par les équations (8).

2° Le point de cet enveloppe où les paramètres p et q sont précisément les coefficients du plan tangent commun à l'enveloppe et à l'enveloppée est un point extra-singulier; les caractéristiques se disposent dans les environs de ce point comme dans le cas d'une équation différentielle ordinaire.

3° Si tous les points de l'enveloppe satisfont à la condition du point extra-singulier, l'enveloppe est une solution singulière; elle est aussi l'enveloppe des intégrales.

4° Si on prend comme intégrale complète une sphère de rayon r, touchant une sphère de rayon R, les surfaces isoclines sont des sphères de rayon $r' = R - r$. Il y a réciprocité; les sphères de rayon r' deviennent des intégrales quand les sphères de rayon r deviennent les surfaces isoclines. L'équation aux dérivées partielles est:

$$\left(x + \frac{rp}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)^2 + \left(y + \frac{rq}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)^2 + \left(z - \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)^2 = r'^2$$

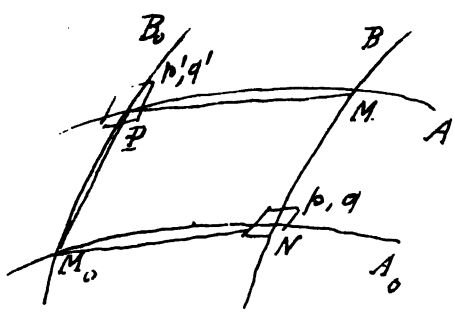
L'intégrale complète s'obtient en échangeant r et r' et en remplaçant p et q par des constantes:

(x) Mémoire sur l'intégraphique, Numéros 717 et suivants. Annales des ingénieurs S. d. l'E. du G. c. de Gand; année 1886-1887. Tirés à part. Gauthier-Villars 1887.

$$\left(x+\frac{z'\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}}\right)^2+\left(y+\frac{z'\beta}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}}\right)^2+\left(z-\frac{z'}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}}\right)^2=z^2$$

L'intégration rappelle l'équation de Clairaut surtout quand $z=z'$.

5° Prenons pour intégrale complète les positions d'une surface invariable A à laquelle on donne un mouvement de translation qui fait décrire à tous les points de cette surface des surfaces B égales et parallèles. A ces surfaces B sont les surfaces isoclines et il y a réciprocité. L'enveloppe commune des surfaces A et B est la solution singulière.



Soient A_0, B_0 deux de ces surfaces ayant respectivement pour équations:

B_0 $\quad F(x_0, y_0, z_0) = 0$

A_0 $\quad F_1(x_0, y_0, z_0) = 0$

Au moyen de l'équation de A_0, on tire:

$$\overline{M_0N} = \bar{f}(p,q) = \bar{u}_x f_1(p,q) + \dots$$

La surface isocline B est le lieu du point M tel que

$$\overline{PM} = \overline{M_0N} \quad ; \quad P \text{ décrivant } B ;$$

son équation est:

$$F\left(x-f_1(p,q),\ y-f_2(p,q),\ z-f_3(p,q)\right)=0$$

C'est l'équation aux dérivées partielles; les fonctions f_1 f_2 f_3 satisfont à:

$$df_3 = p\,df_1 + q\,df_2$$

On trouve les intégrales complètes en faisant varier p et q et cherchant pour P fixe le lieu du point M; on trouve:

$$x = x_0 + f_1(p,q),\ y = y_0 + f_2(p,q),\ z = z_0 + f_3(p,q)$$

Entre les trois constantes x_0, y_0, z_0 on a la relation

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Par raison de réciprocité, on peut aussi mettre l'équation de l'intégrale A sous la même forme que celle de la surface B ; on pose :

$$\overline{NM} = \overline{M_0 P} = \overline{\varphi}(p', q') = \overline{u}_x \varphi_1(p', q') + \dots$$

et l'équation de A est :

$$F_1\big(x - \varphi_1(p', q'),\ y - \varphi_2(p', q'),\ z - \varphi_3(p', q')\big) = 0$$

où p', q' sont des constantes. L'intégration rappelle encore l'équation de Clairaut surtout quand F et F_1 sont identiques.

6° Dans le plan le rayon de courbure de la solution singulière est la somme algébrique des rayons de courbure de l'intégrale et de la courbe isocline qui ont un point commun sur la solution singulière. Dans l'espace les indicatrices de la solution singulière, de la surface isocline et de l'intégrale qui ont un seul élément commun ont deux diamètres conjugués de même direction et pour les sections faites suivant ces diamètres, on a la même relation entre les rayons de courbure que dans le plan.

§ 3. Equation linéaire du second ordre.

20. Caractéristiques du premier ordre. Soit l'équation :

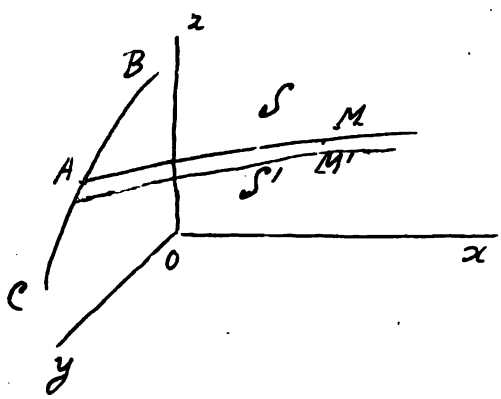
$$R r + S s + T t = V \qquad (1)$$

R, S, T, V étant des fonctions régulières de x, y, z, p, q. Donnons-nous comme conditions initiales une courbe régulière AB du plan des yz et les plans tangents le

long de cette courbe ; cela revient à donner :

pour $x = 0$, les fonctions régulières z_0, $\epsilon - p_0$.

D'après le théorème de l'intégrale générale, on déterminera ainsi une intégrale régulière S.



Voyons s'il est possible d'introduire en A des discontinuités dans les dérivées secondes de manière à obtenir une nouvelle surface intégrale S' se raccordant avec S suivant une caractéristique du premier ordre AM.

Considérons d'abord la multiplicité d'éléments AM (points et plans tangents) comme choisie arbitrairement. Nous pourrons calculer en un point quelconque M toutes les dérivées. Nous obtiendrons la caractéristique du premier ordre en exprimant que les dérivées secondes sont indéterminées. Si dx, dy, dz, dp, dq appartiennent à la courbe AM, on trouvera r, s, t par les équations :

$$\left.\begin{aligned} R\,r + S\,s + T\,t &= U \\ r\,dx + s\,dy &= dp \\ s\,dx + t\,dy &= dq \end{aligned}\right\} \quad \ldots (2)$$

Nous exprimerons que r, s, t sont indéterminés en égalant à zéro les déterminants de la matrice

$$\begin{vmatrix} R & S & T & U \\ dx & dy & 0 & dp \\ 0 & dx & dy & dq \end{vmatrix} = 0$$

On sait que les équations se réduisent à deux ; en

prenant les trois premières colonnes, puis en supprimant la seconde, on trouve :

$$R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 = 0 \qquad (3)$$

$$R\,dp\,dy + T\,dq\,dx = V\,dx\,dy \qquad (4)$$

On peut aussi exprimer que les équations (2) se ramènent à deux d'entre elles par la méthode des coefficients indéterminés. En multipliant la seconde et la troisième respectivement par α et β et ajoutant, on doit pouvoir trouver la première ; on a donc :

$$\alpha\,dx = R\,,\quad \beta\,dy = T\,,\quad \alpha\,dy + \beta\,dx = S\,,\quad \alpha\,dp + \beta\,dq = V$$

En tirant α, β des deux premières, les deux autres deviennent les équations (3) et (4).
De l'équation (3), on tire :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4RT}}{2R}$$

On a donc deux systèmes de caractéristiques :

$$\frac{dy}{dx} = \lambda \qquad \frac{\delta y}{\delta x} = \mu$$

Pour le premier système l'équation (4) devient :

$$R\lambda\,dp + T\,dq = V\lambda\,dx$$

En divisant par $R\lambda\,dx$ et remarquant que

$$\lambda\mu = \frac{T}{R}$$

on trouve :

$$\frac{dp}{dx} + \mu\frac{dq}{dx} = \frac{V}{R}$$

On a aussi :

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

On n'a que 3 équations pour déterminer les fonctions y, z, p, q ; il faut donc y ajouter une équation arbitraire, telle que

$$z = \varphi(x)$$

Finalement les équations de la caractéristique du premier système sont :

$$\left.\begin{aligned} dy &= \lambda\,dx \quad , \qquad dz = p\,dx + q\,dy \\ \frac{dp}{dx} &+ \mu\frac{dq}{dx} = \frac{U}{R} \quad , \qquad z = \varphi(x) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

On trouve de même que les équations de la caractéristique du second système est :

$$\left.\begin{aligned} \delta y &= \mu\,\delta x \quad , \qquad \delta z = p\,\delta x + q\,\delta y \\ \frac{\delta p}{\delta x} &+ \lambda\frac{\delta q}{\delta x} = \frac{U}{R} \quad , \qquad z = \varphi_1(x) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Si on connaît l'intégrale régulière S, on pourra calculer z, p, q, λ ou μ en fonction de x, y et l'on trouve les caractéristiques en intégrant les équations différentielles ordinaires :

$$dy = \lambda\,dx \qquad \delta y = \mu\,\delta x$$

Les autres équations des caractéristiques seront satisfaites ; ainsi la seconde des équations (5) est évidente ; il en est de même des équations (2) et par conséquent de l'équation (4) qui en est une conséquence quand l'équation (3) est satisfaite. Il résulte de là que la fonction φ ou φ_1 dépend du point initial de la caractéristique et des deux fonctions arbitraires qui déter-

-minent l'intégrale régulière.

Cas particulier. Caractéristique d'ordre zéro. Supposons que la valeur de λ soit indépendante de p et q ; on obtiendra une caractéristique d'ordre zéro par les équations :

$$dy = \lambda\, dx \quad , \qquad z = f(x)$$

Pour la même courbe, on peut faire varier p_0 au point initial et obtenir une infinité de multiplicités de plans tangents. Il est facile de voir qu'à un certain point de vue, cette courbe peut être considérée comme une surface dégénérée satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles. Si on considère la courbe comme la limite d'une surface tubulaire à section infiniment petite, on aura évidemment :

$$r, s, t = \infty$$

Introduisons les rapports :

$$r' = \frac{r}{s} \quad , \qquad t' = \frac{t}{s}$$

Divisons l'équation aux dérivées partielles par s, cette équation sera satisfaite, si l'on a :

$$R r' + S + T t' = 0$$

Or, en suivant la courbe, on a :

$$dp = s(r'dx + dy) \quad , \quad dq = s(dx + t'dy)$$

et comme dp et dq sont indéterminés, on a :

$$r'dx + dy = 0 \qquad dx + t'dy = 0$$

Portons ces valeurs de r' et de t' dans l'équation

transformée ; nous aurons :

$$R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 = 0 \qquad (3)$$

équation qui est satisfaite.

Il n'y a pas d'autres intégrales de cette espèce, car si on se donne la courbe, on tire comme plus haut x' et t' et en exprimant que l'équation aux dérivées partielles est satisfaite, on retrouve l'équation (3) des caractéristiques.

Dans ce qui suit nous considérerons le cas général ; nous formerons des intégrales irrégulières au moyen d'intégrales régulières raccordées entre elles ; si on se trouvait dans le cas particulier que nous venons d'examiner, on pourrait réunir des intégrales régulières se coupant suivant des caractéristiques d'intersection.

21. Cas d'un seul système de lignes de discontinuités. Supposons qu'il n'existe aucune dépendance entre les fonctions arbitraires qui déterminent les intégrales. Soit S' ; traçons la caractéristique du premier système en partant de A sur la surface S ; elle satisfera aux équations (5) et la fonction φ dépend de deux fonctions arbitraires qui déterminent S. Si nous traçons la même caractéristique sur la surface S' elle ne coïncide pas avec la première, car la fonction φ sera différente. En d'autres termes, la caractéristique AM a été trouvée en la rendant aussi indépendante que possible des fonctions arbitraires ; mais elle ne l'est pas complètement. Elle n'est pas commune à toutes les intégrales qui se touchent en A, comme dans les équations du premier

ordre. Elle n'est commune qu'aux intégrales qui se touchent en A et pour lesquelles la fonction φ est la même. Si l'on veut que S' se raccorde avec S on doit déterminer S' en se donnant 1° la caractéristique AM ce qui équivaut à se donner une fonction arbitraire 2° une seconde fonction arbitraire telle que la courbe AC. Mais on ne peut plus se donner les plans tangents le long de AC. On peut établir, en effet, le développement en série de l'intégrale S' satisfaisant à ces conditions et y appliquer la méthode des fonctions majorantes pour démontrer que ce développement est convergent et satisfait à l'équation (x)
Nous pouvons donc nous donner la caractéristique AM, et une courbe AC irrégulière mais formée d'arcs réguliers tangents l'un à l'autre ; en appliquant le théorème précédent aux différents arcs, nous démontrerons qu'il existe une intégrale irrégulière, formée de bandeaux réguliers, ayant la courbe irrégulière AC comme courbe initiale. Les caractéristiques qui séparent les bandeaux forment les lignes de discontinuités pour les dérivées d'ordre supérieur au premier.
Cette intégrale peut être engendrée par la caractéristique en prenant la courbe initiale comme courbe directrice. Mais si on appliquait les équations (5) en faisant varier la fonction φ d'une manière arbitraire, le problème ne serait pas résolu. La variation de la fonction φ d'une génératrice à l'autre doit être telle que

---

Goursat. Leçons sur l'intégration des equations aux dérivés partielles du second ordre. tome I. Chapitre IV.

p et q soient les coefficients du plan tangent de la surface ; en d'autres termes il faut que le déplacement élémentaire d'un point M de la caractéristique satisfasse à l'équation

$$\delta z = p\,\delta x + q\,\delta y$$

S'il en est ainsi la surface satisfait à l'équation aux dérivées partielles. En effet, si p et q sont les coefficients du plan tangent à la surface, on a :

$$dp = r\,dx + s\,dy \quad , \quad \frac{dp}{dx} = r + s\lambda$$

$$dq = s\,dx + t\,dy \quad , \quad \frac{dq}{dx} = s + t\lambda$$

La troisième des équations (5) devient :

$$r + s\lambda + \mu(s + t\lambda) = \frac{U}{R}$$

Or

$$\lambda + \mu = \frac{S}{R} \quad , \quad \lambda\mu = \frac{T}{R}$$

On a donc

$$R\,r + S\,s + T\,t = U$$

ce qui démontre que l'équation est satisfaite. On peut déduire de là une construction approchée de la surface ; au point A, on détermine r, s, t en utilisant l'équation de la courbe AC aux différentielles secondes et les deux équations auxquelles se réduisent les équations (2). On en déduit les valeurs de p, q en un point A' de la courbe initiale très-voisin de A ; on détermine la caractéristique A'M' par les équations (5) ; l'équation $z = \varphi(x)$ sera remplacée par la condition que la nouvelle caractéristique se trouve sur la développable engendrée

par les plans tangents le long de AM.

22. Cas de deux systèmes de lignes de discontinuité. Donnons-nous comme conditions initiales une courbe du plan des yz, projetée en ABCD et les plans tangents le long de cette courbe. Supposons que cette multiplicité d'éléments soit divisée en multiplicités régulières AB, BC, CD etc. mais que des discontinuités dans les dérivées d'ordre supérieur au premier existent aux points de jonction. On demande de couvrir une partie du plan des xy au moyen d'une surface unique continue satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles.

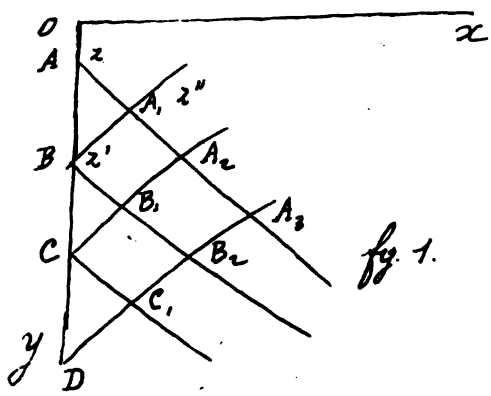


fig. 1.

Le premier arc AB et les plans tangents déterminent une intégrale régulière que nous limiterons aux caractéristiques AA_1, BA_1 de systèmes différents ; nous choisirons les caractéristiques qui font avec AB le plus petit angle. Le second arc BC détermine une intégrale régulière que nous limiterons de même au triangle curviligne BB_1C par deux caractéristiques de systèmes différents. On démontre en analyse (Goursat, loc. cit, p. 194) que deux caractéristiques BA_1 et BB_1 qui ont en B un élément commun déterminent une intégrale régulière. Nous limiterons cette intégrale régulière aux caractéristiques A_1A_2, B_1A_2. L'arc CD détermine le triangle CC_1D et on en déduit les quadrangles $CB_1B_2C_1$, $B_1A_2A_3B_2$ et on continue de même. Il est donc démontré qu'il existe une intégrale irrégulière

satisfaisant aux conditions du problème et cette intégrale est formée de surfaces régulières qui se raccordent suivant des arcs réguliers de caractéristiques du premier ordre.

23. Tracé graphique. Supposons les arcs assez petits pour que les fonctions y, z, p, q soient dans l'étendue de chaque arc représentées par des arcs peu courbes. Au besoin, on subdivisera les arcs AB, BC, CD jusqu'à ce que ces conditions soient satisfaites. On connaît en A: x, y, z, p, q; en B: x', y', z', p', q'; proposons-nous de déterminer approximativement x'', y'', z'', p'', q'' en A_1. Nous aurons d'abord

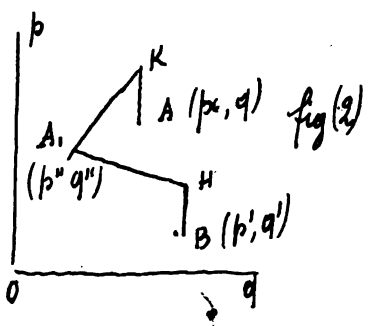
$$\text{pour } AA_1 \qquad dy = \lambda\, dx$$
$$\text{pour } BA_1 \qquad \delta y' = \mu'\, \delta x'$$

Si on remplace les différentielles par des différences, on aura deux équations en x'', y''. Graphiquement on trouve le point A_1 en remplaçant les caractéristiques AA_1 et BA_1 par leurs tangentes en A et B. Nous calculerons alors les valeurs de p'' et q'' au moyen des équations :

$$AA_1 \qquad dp + \mu\, dq = \frac{U}{R}\, dx$$

$$BA_1 \qquad \delta p' + \lambda'\, \delta q' = \frac{U'}{R'}\, \delta x'$$

En remplaçant les différentielles par les différences on a deux équations en p'' q''.



Portons p et q en ordonnées ; on trouve le point A. De même p' q' détermine le point B. Les équations précédentes représentent deux droites KA_1, HA_1 parallèles aux droites

AA_1 , BA_1 de la figure (4) et telle que:

$$AK = \frac{V}{R}\,dx \quad , \qquad BH = \frac{V'}{R'}\,dx'$$

Le point d'intersection A_1 détermine p'', q''.
On déterminera ensuite l'ordonnée z'' par l'équation

$$dz = p\,dx + q\,dy = (p + \lambda q)\,dx$$

ou

$$\delta z' = p'dx' + q'dy' = (p' + \mu' q')\,\delta x'$$

Nous vérifierons plus loin que les deux valeurs de z'' seront égales, aux approximations admises ; on peut prendre la moyenne des deux valeurs obtenues.
Ce calcul étant effectué, on se rapprochera de l'exactitude par la méthode des moyennes. On écrira pour les courbes AA_1 et BB_1 les équations aux différences

$$dy = \frac{\lambda + \lambda''}{2}\,dx \quad , \qquad \delta y' = \frac{\mu' + \mu''}{2}\,\delta x' \qquad (7)$$

On remplacera aussi les équations différentielles en dp, dq, $\delta p'$, $\delta q'$ par les équations aux différences

$$\left.\begin{aligned} dp + \frac{\mu'' + \mu}{2}\,dq &= \frac{1}{2}\left(\frac{V}{R} + \frac{V''}{R''}\right)dx \\ \delta p' + \frac{\lambda' + \lambda''}{2}\,\delta q' &= \frac{1}{2}\left(\frac{V'}{R'} + \frac{V''}{R''}\right)\delta x' \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Enfin on écrira :

$$\left.\begin{aligned} dz &= \frac{p + p''}{2}\,dx + \frac{q + q''}{2}\,dy \\ \delta z' &= \frac{p' + p''}{2}\,\delta x' + \frac{q' + q''}{2}\,\delta y' \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

On peut aussi écrire immédiatement ces équations en prenant x'', y'', z'', p'', q'' comme inconnues et tirer ces inconnues ; mais ces équations sont compliquées

et en général, la méthode des approximations successives est beaucoup plus facile.

On détermine le point B_1 de la même manière ; partant alors des points A_1 et B_1, on écrit les équations des caractéristiques $A_1 A_2$ et $B_1 A_2$, on détermine le point A_2 et ainsi de suite.

Il nous reste à vérifier que les deux manières de déterminer z'' donneront deux valeurs qui ne diffèreront que d'une quantité de l'ordre de celles que l'on a négligées dans le calcul.

Considérons le triangle ABA_1 ; nous ferons les calculs en négligeant les petites quantités d'ordre supérieur au second. Représentons les accroissements des quantités de A en B par l'indice Δ ; les deux valeurs de z'' sont :

$$z'' = z + dz \quad , \quad z'' = z + \Delta z + \delta z'$$

Il faut donc vérifier que la quantité

$$dz - \delta z' - \Delta z$$

est d'ordre supérieur au second.

Les équations (9) qui donnent dz et $\delta z'$ peuvent s'écrire :

$$dz = \frac{p+p'}{2} dx + \frac{q+q'}{2} dy + \frac{1}{2} (\delta p' dx + \delta q' dy)$$

$$\delta z' = \frac{p+p'}{2} \delta x' + \frac{q+q'}{2} \delta y' + \frac{1}{2} (dp\, \delta x' + dq\, \delta y')$$

En multipliant les équations (8) et (9) respectivement par $\delta x'$ et dx, on trouve :

$$dp\, \delta x' + dq\, \delta y' = \frac{1}{2} \left(\frac{V}{R} + \frac{V''}{R''} \right) dx\, \delta x' + \frac{\Delta w}{2} dq\, \delta x'$$

$$\delta p' dx + \delta q' dy = \frac{1}{2} \left(\frac{V'}{R'} + \frac{V''}{R''} \right) dx\, \delta x' - \frac{\Delta \lambda}{2} \delta q' dx$$

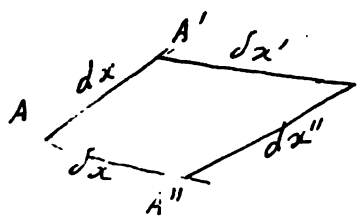
En portant ces expressions dans les valeurs de dz et $\delta z'$ et en remarquant que $\Delta x = dx - \delta x'$, $\Delta y = dy - \delta y'$, on a:

$$dz - \delta z' = \frac{p+p'}{2}\Delta x + \frac{q'+q}{2}\Delta y + \frac{1}{4}\left(\frac{V'}{R'} - \frac{V}{R}\right) dx\, \delta x' - \cdots$$

Or on a:

$$\Delta z = \frac{p+p'}{2} + \frac{q'+q}{2}\Delta y + \cdots$$

L'expression $dz - \delta z' - \Delta z$ est donc une quantité d'ordre supérieur au second.



Considérons maintenant un quadrangle $A\,A'\,A'''\,A''$; en suivant le contour $AA'A'''$, on a:

$$z''' = z + dz + \delta z + \delta dz$$

En suivant $A\,A''A'''$:

$$z'' = z + \delta z + dz + d\delta z$$

Il faut donc vérifier que

$$\delta dz - d\delta z$$

est une quantité très-petite d'ordre supérieur au second.

On a pour AA':

$$dz = \frac{p+p'}{2}dx + \frac{q+q'}{2}dy$$

On en déduit:

$$\delta dz = \frac{\delta p\, dx + \delta q\, dy}{2} + \frac{p''\,d\delta x + q''\,d\delta y}{2} + \frac{\delta p'\,dx'' + \delta q'\,dy''}{2} + \frac{p'\,d\delta x + q'\,d\delta y}{2}$$

Or on a:

$$\delta p + \frac{\lambda+\lambda'''}{2}\delta q = \frac{1}{2}\left(\frac{V}{R} + \frac{V'''}{R'''}\right)\delta x$$

$$\delta p' + \frac{\lambda'+\lambda'''}{2}\delta q' = \frac{1}{2}\left(\frac{V'}{R'} + \frac{V'''}{R'''}\right)\delta x'$$

Multiplions la première par dx, la seconde par dx''; il vient:

$$\delta p\, dx + \delta q\, dy + \frac{\lambda''-\lambda'}{2}\delta q = \frac{1}{2}\left(\frac{U}{R} + \frac{U''}{R''}\right) dx\, dx$$

$$\delta p'\, dx'' + \delta q'\, dy'' - \frac{\lambda''-\lambda'}{2}\delta q' = \frac{1}{2}\left(\frac{U'}{R'} + \frac{U'''}{R'''}\right) dx''\, \delta x'$$

On a alors:

$$\delta d\alpha = \frac{\lambda''-\lambda'}{4} d\,\delta q + \frac{1}{4}\left(\frac{U}{R} + \frac{U''}{R''}\right) dx\, dx$$

$$+ \frac{1}{4}\left(\frac{U'}{R'} + \frac{U'''}{R'''}\right) dx''\, \delta x' + \frac{p''+p'}{2} d\,\delta x + \frac{q''+q'}{2} d\,\delta y$$

On trouve de même:

$$d\,\delta\alpha = \frac{\mu'-\mu''}{4}\delta dq + \frac{1}{4}\left(\frac{U}{R} + \frac{U'}{R'}\right) dx\, dx$$

$$+ \frac{1}{4}\left(\frac{U''}{R''} + \frac{U'''}{R'''}\right) dx''\, dx' + \frac{p'+p''}{2} d\,\delta x + \frac{q'+q''}{2} d\,\delta y$$

d'où:

$$d\,\delta\alpha - \delta d\alpha = \frac{1}{4}\left(\frac{R'}{T'} - \frac{R''}{T''}\right)\delta dq + \frac{1}{4}\left(\frac{U''}{R''} - \frac{U'}{R'}\right)(dx''\, \delta x' - dx\, \delta x)$$

On voit que cette quantité est d'ordre supérieur au second.

24. Remarque. Est-on bien certain que les tracés que nous venons d'exposer conduisent à une solution approchée de l'équation.? Remarquons qu'il est démontré rigoureusement que les triangles et quadrangles calculés existent, que les arcs qui les séparent sont réguliers, que ces arcs satisfont aux équations différentielles qui ont été appliquées. On ne s'écarte de la vérité qu'en calculant pour ces arcs les accroissement des fonctions inconnues par la moyenne des dérivées extrêmes. On peut considérer comme évident que l'on déformera la solution exacte aussi peu qu'on le voudra. Dans le chapitre premier, nous avons indiqué une méthode qui conduisait

à des résultats faux. Les causes de ces inexactitudes sont disparues dans l'intégration par les caractéristiques ; aucun arc auquel on applique la méthode des moyennes des dérivées n'est irrégulier ; ensuite les équations différentielles ne sont pas en nombre infini. Néanmoins il y a, au point de vue théorique, une lacune à combler. Après avoir obtenu un premier réseau de caractéristiques, on devrait subdiviser les arcs, déterminer le domaine de variation des caractéristiques de manière à enfermer chacune d'elles entre deux limites, démontrer que ces deux limites se rapprochent indéfiniment et que les limites des multiplicités obtenues satisfont aux équations des caractéristiques. Les calculs sont très-longs.

25. Arête de rebroussement. Suivons le même raisonnement qu'au numéro 18. Reprenons les équations (2) et exprimons que r, s, t sont infinis ; nous obtenons l'équation (3), sans l'équation (4). Nous aurons donc

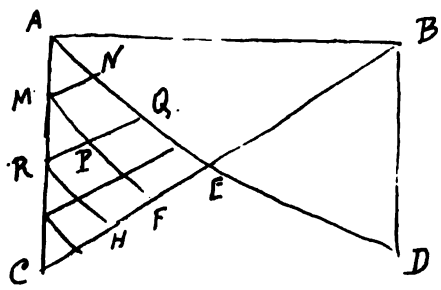
$$dy = \lambda\, dx, \qquad dz = p\,dx + q\,dy$$

et il faudra ajouter deux équations arbitraires pour déterminer la multiplicité du premier ordre. Si on prend cette multiplicité comme condition initiale, on voit que les caractéristiques touchent la courbe initiale ; c'est la courbe intégrale ou arête de rebroussement.

26 Problèmes divers. On donne comme condition initiale une courbe projetée sur AB et la multiplicité des plans tangents le long de cette courbe. On veut couvrir la partie CABD du plan des x y, au moyen d'une surface unique

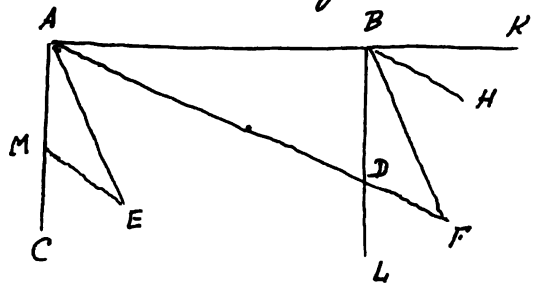
et continue. Quelles conditions arbitraires peut-on se donner dans les plans AC et BD ?

Premier cas. La multiplicité du premier ordre AB, régulière ou non, détermine d'abord une surface intégrale limitée aux caractéristiques AE et EB de systèmes différents. Nous prenons d'abord le cas où, en A, l'une des caractéristiques AE est dans l'angle EAC et l'autre à l'extérieur de cet angle. Nous pouvons couvrir l'espace EAC au moyen d'une surface intégrale qui dépend encore d'une fonction arbitraire ; on peut la déterminer en se donnant, par exemple, la courbe projetée sur AC. Pour construire cette intégrale divisons l'arc AC en arcs très-petits et réguliers. Du triangle ANM formé par AM et deux caractéristiques, nous connaissons A et N, c'est-à-dire que nous connaissons x, y, z, p, q en ces points. Nous déterminerons le point $M(x, y, z, p, q)$ en appliquant à NM les 3 équations de la caractéristique et les équations de la courbe donnée à AM. Connaissant M on en déduit le quadrangle MNQP et le bandeau MNEF. On passe au triangle MPR et au bandeau RPFH et ainsi de suite. On voit que la surface AEB est commandée par la multiplicité AB exclusivement ; tandis que la surface EAC dépend à la fois de AB et de AC. On trouve de même la surface EBD en se donnant la courbe BD. Sur CE et ED, on construit un quadrangle subdivisé en quadrangles réguliers etc..



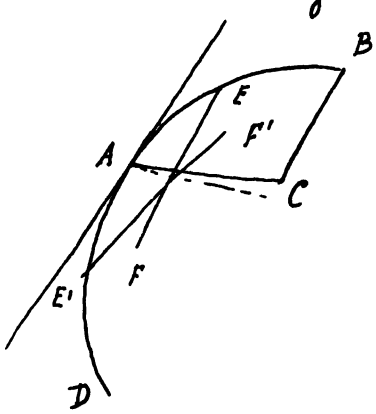
Autre disposition. Supposons que les deux caracté-ris-

-tiques AD, AE qui passent par A soient situées toutes les deux dans l'angle BAC ; supposons de même que



les caractéristiques du point B soient dans l'angle KBL en BH et BF. La multi-plicité AB détermine la surface ABD ; on pourrait même dire que cette surface est déterminée jusqu'en BF. On pourrait comme précédemment se donner BL et trouver la surface LBF, mais alors l'espace LBF serait couvert par deux surfaces. Pour rester dans les conditions du problème proposé, on doit limiter la surface commandée par AB à ABD et l'on ne peut pas donner arbitrairement la courbe BD. Mais, au contraire, on peut se donner dans le plan AC, une multiplicité du premier ordre ayant en A un élément commun avec la multiplicité AB. En effet, de cette multiplicité AM régulière ou non, on déterminera une surface AEM par la méthode ordinaire. On déterminera ensuite une surface par les caractéristiques AD et AE. Toutes ces surfaces se déterminent par triangles et quadrangles, comme il a été dit plus haut.

Courbe initiale gauche ou plane. On donne une multiplici-



-té du premier ordre contenant la courbe BAD. Supposons qu'en A l'une des caractéristiques touche la courbe initiale. Si on trace les caractéristiques EF et E'F', on voit qu'elles courent le même es-pace ; il y a deux nappes. En général,

le point A est sur l'arête de rebroussement. Si l'on ne veut construire qu'une surface unique, on détermine la surface CAB commandée par la multiplicité AB. On se donne alors la courbe AD sans les plans tangents et l'on détermine la surface CAD.

27. Sur la réalité des racines. Que deviendraient les solutions que nous venons de trouver si les racines λ et μ de l'équation (3) devenaient imaginaires? Il n'y aurait alors aucune caractéristique réelle. Donc si l'on donne comme conditions initiales, une multiplicité du premier ordre irrégulière formée d'arcs réguliers, on trouvera une intégrale régulière pour chaque arc mais les intersections de ces surfaces ne satisfont pas à l'équation proposée, et il est impossible de raccorder ces surfaces entr'elles par des surfaces intégrales intermédiaires, car les lignes de raccordement, si elles existaient seraient des caractéristiques réelles.

Exemple: $r + t = 0$

caractéristique $dy = \pm i\,dx$

intégrale génér. $z = \varphi(y - ix) + \psi(y + ix)$

intégrale part. $z = \pm (x^2 - y^2)$

L'intégrale particulière satisfait aux conditions initiales:

$x = 0 \qquad z = \mp y^2 \quad , \quad p = 0$

Si on prend:

$z = -y^2 \quad$ pour $y > 0$

$z = +y^2 \quad$ pour $y < 0$

On obtient les deux paraboloïdes qui se coupent suivant deux génératrices, mais il est impossible

de les raccorder.

Il résulte de là que les solutions irrégulières, avec lignes de discontinuités, n'existent pas quand les caractéristiques sont imaginaires. Il y a certains problèmes tels que la poussée des terres, le mouvement des eaux courantes où l'expérience indique que les solutions irrégulières existent, on peut en conclure que les caractéristiques doivent être réelles.

§4. Equation quelconque du second ordre.

28. Equation de Monge et d'Ampère. Soit une équation

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \qquad (1)$$

On peut d'abord essayer la méthode du paragraphe précédent; on se donne une multiplicité du premier ordre et on écrit:

$$\left.\begin{aligned} dp &= r\,dx + s\,dy \\ dq &= s\,dx + t\,dy \end{aligned}\right\} (2)$$

On cherche dans quel cas les valeurs de r, s, t sont indéterminées. Il faut pour cela que l'équation (1) soit une conséquence des équations (2). Cela n'arrivera que si l'équation (1) a certaines formes particulières et si l'on établit des relations entre dx, dy, dp, dq.

Supposons que l'on prenne:

$$\left.\begin{aligned} dp &= a\,dx + b\,dy \\ dq &= a_1\,dx + b_1\,dy \end{aligned}\right\} (3)$$

a, b, a_1, b_1 = fonct. (x, y, z, p, q)

Les équations (2) deviennent:

$$\begin{aligned} (r-a)\,dx + (s-b)\,dy &= 0 \\ (s-a_1)\,dx + (t-b_1)\,dy &= 0 \end{aligned}$$

Et ces équations ont pour conséquence:

$$(r-a)(t-b_1)-(s-b)(s-a_1)=0$$

ou bien:

$$rt-s^2-b_1 r+(a_1+b)s-at+ab_1-a_1 b=0 \qquad (4)$$

Si donc on donne l'équation (4), les équations (3) déterminent une caractéristique du premier ordre et l'on pourra construire les surfaces intégrales par la méthode du paragraphe précédent.

L'équation (4) peut être identifiée à la suivante:

$$rt-s^2+Hr+2Ks+Lt+M=0 \qquad (4)$$

On a:

$$b_1=-H\ ,\quad a_1+b=2K\ ,\quad a=-L\ ,\quad ab_1-a_1 b=M$$

D'où

$$b_1=-H\ ,\quad a=-L\ ,\quad a_1+b=2K\quad a_1 b=HL-M$$

Les valeurs de a_1 et b sont les racines de l'équation:

$$\lambda^2-2K\lambda+HL-M=0$$

Soient λ_1, λ_2 les racines de cette équation; on trouve une première caractéristique, en prenant $a_1=\lambda_1$, $b_1=\lambda_2$; on trouve:

$$\left.\begin{aligned} dp &= -L\,dx+\lambda_1\,dy \\ dq &= \lambda_2\,dx-H\,dy \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

On y ajoute:

$$dz=p\,dx+q\,dy$$

$$z=\varphi(x)$$

Ces équations déterminent les 4 fonctions y, z, p, q. On obtient l'autre caractéristique en changeant λ_1 en λ_2 et φ en φ_1.

En prenant des relations du second degré ou de degré supérieur entre dx, dy, dp, dq, on trouve que ce sont les équations des caractéristiques d'équations aux dérivées partielles contenant r, s, t à des degrés plus élevés.

2) Equation quelconque. Soit l'équation du second ordre la plus générale :

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \qquad (1)$$

Si le long d'une courbe, d'abord choisie arbitrairement, on se donne p et q, on trouve r, s, t au moyen de l'équation (1) et de

$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy \qquad (2)$$

Nous supposons que l'équation (1) ne puisse pas être une conséquence des équations (1) et (2) ; il n'y a pas de caractéristique du premier ordre. Nous calculerons les dérivées troisièmes par les équations :

$$R\frac{\partial r}{\partial x} + S\frac{\partial s}{\partial x} + T\frac{\partial t}{\partial x} + \left(\frac{dF}{dx}\right) = 0$$

$$\frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial s}{\partial y}dy = dr$$

$$\frac{\partial s}{\partial x}dx + \frac{\partial t}{\partial x}dy = ds$$

La première a été obtenue en différentiant l'équation (1) par rapport à x et en posant :

$$\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}p + \frac{\partial}{\partial p}r + \frac{\partial}{\partial q}s.$$

$$R = \frac{\partial F}{\partial r}, \quad S = \frac{\partial F}{\partial s}, \quad T = \frac{\partial F}{\partial t}$$

Nous obtiendrons une caractéristique du second ordre en exprimant que ces équations entre les trois dérivées troisièmes sont indéterminées. On trouve :

$$\begin{vmatrix} R & S & T & \left(\frac{dF}{dx}\right) \\ dx & dy & 0 & -dr \\ 0 & dx & dy & -ds \end{vmatrix} = 0$$

ou bien :

$$R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 = 0 \qquad (3)$$

$$R\,\frac{dr}{dx} + T\,\frac{ds}{dx} + \left(\frac{df}{dx}\right) = 0 \qquad (4)$$

De l'équation (3) on tire deux valeurs λ et μ de $\frac{dy}{dx}$; on trouve alors pour la première caractéristique

$$\left.\begin{aligned} dy &= \lambda\,dx \\ dr + \mu\,ds &= -\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{dx}{R} \end{aligned}\right\} (5)$$

En joignant :

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy \qquad (6)$$

et l'équation (1), on a 6 équations pour déterminer les 7 fonctions y, z, p, q, r, s, t. Il faut y ajouter une équation arbitraire telle que

$$z = \varphi(x) \qquad (7)$$

Si nous avions pris la dérivée de l'équation (1) par rapport à y, nous aurions trouvé, au lieu de la seconde des équations (5) :

$$ds + \mu\,dt = -\left(\frac{df}{dy}\right)\frac{dx}{R}$$

Cette équation combinée avec la seconde des équations (5) a pour conséquence

$$dF = 0$$

Elle peut remplacer l'équation (1) sauf à introduire une constante.

On trouve de même les équations de la seconde carac-

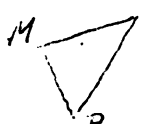
- téristique:

$$\delta y = p\,\delta x \quad , \quad \delta z + \lambda\,\delta s + \left(\frac{dF}{dz}\right)\frac{\delta x}{R} = 0 \qquad (8)$$

$$\delta z = p\,\delta x + q\,\delta y \quad , \quad \delta p = r\,\delta x + s\,\delta y, \quad \delta q = s\,\delta x + t\,\delta y \qquad (9)$$

$$z = \varphi_1(x) \qquad (10)$$

3° Intégration graphique. On démontre comme au numéro 21 qu'il existe des surfaces intégrales irrégulières, formées de bandeaux réguliers, engendrés par une caractéristique régulière. Dans le cas général, la solution du problème est une intégrale irrégulière formée de triangles et quadrangles réguliers (22, 26). L'intégration graphique diffère à peine de celle qui a été exposée au numéro 23. Tout nouveau point P à calculer se trouve à l'intersection de deux caractéristiques MP, NP partant de deux points connus. S'il s'agit d'une équation de Monge et d'Ampère, on



calcule x, y, z, p, q au moyen des trois équations de chacune des caractéristiques MP et NP ; on a six équations; on peut calculer z de deux manières, mais le résultat est le même à l'approximation admise. S'il s'agit d'une équation de forme quelconque, on calcule en P les huit quantités x, y, z, p, q, r, s, t au moyen des six équations de chacune des caractéristiques ; comme l'équation $F = 0$ est commune aux deux courbes, il y a 11 équations pour 8 inconnues ; on peut calculer z, p, q au moyen des dz, dp, dq ou au moyen des $\delta z, \delta p, \delta q$; on arrive au même résultat. La remarque relative à la réalité des racines est applicable ici, ainsi qu'aux autres problèmes que nous rencontrerons plus tard.

§5. Equations simultanées linéaires.

31. Caractéristiques d'ordre zéro. Soient z, z' deux fonctions inconnues de deux variables indépendantes x, y satisfaisant aux deux équations simultanées linéaires :

$$A p + B q + C p' + D q' = E \qquad (1)$$

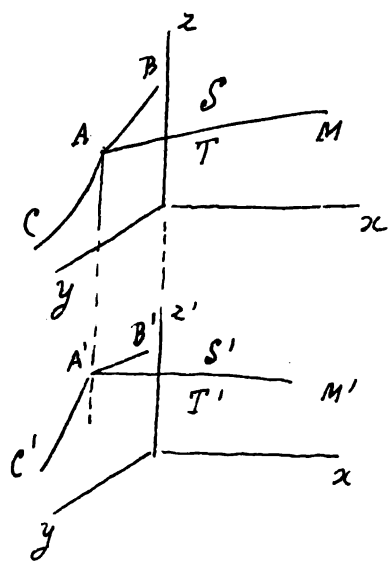
$$A' p + B' q + C' p' + D' q' = E' \qquad (2)$$

où :

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad p' = \frac{\partial z'}{\partial x}, \quad q' = \frac{\partial z'}{\partial y}$$

$A, B \ldots D', E' =$ fonct. régulières de x, y, z, z'.

Ces deux fonctions z et z' peuvent être représentées par deux surfaces associées en portant x, y, z et x', y', z' en coordonnées. D'après le théorème de l'intégrale générale des équations aux dérivées partielles, on peut se donner sur chaque surface une courbe arbitraire régulière ; soient BA, $B'A'$ ces courbes, supposées dans les plan des yz et des $y'z'$. Voyons ce qui arrive lorsque les courbes initiales BAC, $B'A'C'$ sont formées chacune de deux arcs réguliers de manière à présenter en AA' des discontinuités dans les dérivées premières et autres. Voyons s'il est possible de former une solution régulière représentées par les surfaces S, S' commandées par les arcs BA, $B'A'$, les surfaces T, T' commandées par les arcs AC, $A'C'$ et les intersections associées des surfaces S et T, S' et T'.



Soient : dx, dy, dz, dz' les différentielles appliquées à un point M, M' de ces courbes associées ; on a :

$$p\,dx + q\,dy = dz \qquad (3)$$
$$p'dx + q'dy = dz' \qquad (4)$$

Au moyen des équations (1) (2) (3) (4), on peut calculer p, q, p', q'. En prenant les dérivées de ces équations on calculera les dérivées d'ordre quelconque des fonctions z et z'. Nous obtiendrons une caractéristique d'ordre zéro en exprimant que les équations (1) (2) (3) (4) sont indéterminées ; nous obtiendrons une caractéristique d'ordre n en exprimant que les dérivées d'ordre n+1 sont indéterminées. La caractéristique d'intersection AM, A'M' s'obtiendra donc en égalant à zéro les déterminants de la matrice :

$$\begin{vmatrix} dx & dy & 0 & 0 & dz \\ 0 & 0 & dx & dy & dz' \\ A & B & C & D & E \\ A' & B' & C' & D' & E' \end{vmatrix} = 0.$$

En supprimant la dernière colonne, on trouve un premier déterminant à égaler à zéro. Si dans ce premier déterminant on multiplie les colonnes d'ordre pair par dx, les autres par dy puis si on retranche chaque colonne de rang pair de la précédente, on trouve aussi :

$$\begin{vmatrix} A\,dy - B\,dx & C\,dy - D\,dx \\ A'dy - B'dx & C'dy - D'dx \end{vmatrix} = 0$$

On tire de cette équation du second degré en $\frac{dy}{dx}$ les deux solutions :

$$dy = \lambda_1\,dx \quad , \quad \delta y = \lambda_2\,dx \qquad (5)$$

En prenant la dernière colonne et trois autres de la matrice écrite plus haut, on trouve pour chaque caractéristique une équation :

$$dz + a_1\, dz' = b_1\, dx \quad , \quad \delta z + a_2\, dz' = b_2\, dx \qquad (6)$$

Considérons la caractéristique du premier système ; il manque une équation ; nous devons donc ajouter une équation arbitraire ; on trouve :

$$dy = \lambda_1\, dx \quad , \quad dz + a_1\, dz' = b_1\, dx \quad , \quad z = \varphi(x) \qquad (7)$$

On a de même :

$$\delta y = \lambda_2\, \delta x \quad , \quad \delta z + a_2\, \delta z' = b_2\, \delta x \quad , \quad z = \varphi_1(x) \qquad (8)$$

Les quantités λ_1, λ_2, a_1, a_2, b_1, b_2 s'obtiennent en développant les déterminants dont il a été fait mention ; mais on peut aussi employer la méthode des coefficients indéterminés. Multiplions les équations (1) (2) (3) (4) respectivement par α, β, 1, a ; ajoutons et exprimons qu'on arrive à une identité ; on a :

$$\left.\begin{aligned} A\alpha + A'\beta + dx &= 0 \\ B\alpha + B'\beta + dy &= 0 \\ C\alpha + C'\beta + a\,dx &= 0 \\ D\alpha + D'\beta + a\,dy &= 0 \\ E\alpha + E'\beta + dz + a\,dz' &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

En éliminant α, β, a, on trouve les deux équations des caractéristiques. Des deux premières, on tire :

$$\alpha(A\,dy - B\,dx) + \beta(A'dy - B'dx) = 0$$

De la 3e et la 4e :

$$\alpha(C\,dy - D\,dx) + \beta(C'dy - B'dx) = 0$$

On déduit de là :

$$-\frac{\beta}{\alpha} = \frac{A\,dy - B\,dx}{A'\,dy - B'\,dx} = \frac{C\,dy - D\,dx}{C'\,dy - B'\,dx}$$

c'est l'équation en $\frac{dy}{dx}$, d'où l'on tire les deux valeurs $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$. La seconde équation de la caractéristique est la dernière des équations (9) où a, α, β sont remplacés par leurs valeurs tirées des précédentes. Des deux premières, on tire:

$$\beta = -\frac{A\,dy - B\,dx}{AB' - A'B}, \quad \alpha = \frac{A'\,dy - B'\,dx}{AB' - A'B}$$

De la 3e et de la 4e:

$$\beta = -\frac{C\,dy - D\,dx}{CD' - C'D}\,a, \quad \alpha = \frac{C'\,dy - D'\,dx}{CD' - C'D}\,a$$

On trouve a en égalant les valeurs de β ou de α:

$$a = \frac{CD' - C'D}{AB' - A'B}\,\frac{A\,dy - B\,dx}{C\,dy - D\,dx} = \frac{CD' - A'D}{AB' - A'B}\,\frac{A'\,dy - B'\,dx}{C'\,dy - D'\,dx}$$

On a aussi:

$$b = -E\alpha - E'\beta = -E\,\frac{A'\,dy - B'\,dx}{AB' - A'B} + E'\,\frac{A\,dy - B\,dx}{AB' - A'B}$$

La seconde équation de la caractéristique est alors

$$dz + a\,dz' = b\,dx$$

Pour $\lambda = \lambda_1$, on trouve $a = a_1$, $b = b_1$: c'est la première caractéristique ; pour $\lambda = \lambda_2$, on trouve $a = a_2$, $b = b_2$, c'est la seconde caractéristique.

32. Propriétés des caractéristiques. 1° Les deux courbes associées qui constituent une caractéristique peuvent être considérées comme la limite de deux surfaces tubulaires à section infiniment petite et à ce point de vue la caractéristique est une solution. Comme les surfaces tubulaires sont associées, les plans tangents aux courbes limites doivent aussi être associés ; nous les associerons de manière à satisfaire à l'équation (1). Il est facile de voir que l'équation (2) sera aussi satisfaite ; en effet, les équations (1) (2) (3) (4)

se réduisent à trois ; or (1), (3), (4) sont satisfaites, donc (2) l'est aussi. La caractéristique est donc une solution quand on associe les plans tangents comme nous venons de le dire.

2°. Si les surfaces intégrales sont connues, on pourra toujours engendrer ces surfaces par l'un ou l'autre système de caractéristiques. En effet, quand on connaît z, z' en fonction de x, y, chacune des équations (5) devient une équation différentielle à une fonction inconnue et détermine une famille de courbes dans le plan des xy et une famille de courbes associées sur les deux surfaces intégrales. Il résulte de là que la fonction φ ou φ_1 dépend du point initial et des deux fonctions arbitraires qui déterminent la solution.

3°. Si on fait construire deux surfaces engendrées par les deux systèmes de caractéristiques, ces surfaces sont des intégrales du problème. En effet, on a pour la première caractéristique

$$dy = \lambda_1 dx \quad , \quad dz + a_1 dz' = b_1 dx$$

En exprimant dz et dz' au moyen des dérivées p, q, p', q', on a:

$$p + \lambda_1 q + a_1 (p' + q' \lambda_1) = b_1 \qquad (10)$$

On trouve de même:

$$p + \lambda_2 q + a_2 (p' + q' \lambda_2) = b_2 \qquad (11)$$

Les surfaces satisfont donc à 2 équations aux dérivées partielles ; il est facile de voir que ce sont des combinaisons des équations (1) et (2). En effet, si on multiplie (1) par α, (2) par β et si on ajoute, on trouve en tenant compte des équations (9)

$$-p\,dx - q\,dy - p' a\,dx - q' a\,dy = -dz - a\,dz'$$

Pour $dy = \lambda_1 dx$, on retrouve (10).

On peut raisonner autrement. On se donne les équations (5) et (6) des caractéristiques ; on en tire les équations (10) et (11). On identifie l'une de ces équations avec une combinaison linéaire des équations proposées et on trouve les valeurs de λ, a, b. Les calculs sont semblables à ceux du numéro précédent.

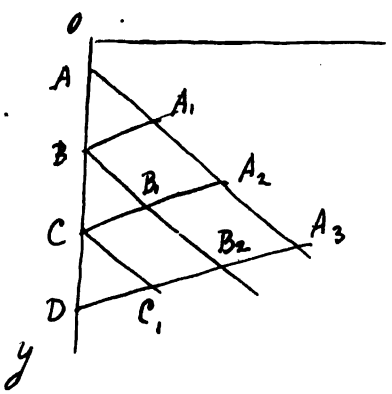
4°. Si on engendrait deux surfaces par une seule caractéristique, le problème ne serait pas résolu ; les surfaces ne satisferaient qu'à une seule équation (10) ou (11). Il faut ajouter que la caractéristique doit se mouvoir de manière à satisfaire à (1) ou à (2).

33. Intégrale irrégulière à une seule série de lignes de discontinuités. Les courbes régulières BA, B'A' déterminent une solution régulière S, S'. A partir de A prenons deux autres courbes AC, AC' ; elles déterminent une autre solution régulière T et T'. En général les caractéristiques qui partent de A, A' ne seront pas les mêmes pour les deux solutions, car la fonction f dépend des deux fonctions qui déterminent ces solutions ; d'ailleurs quand on se donne la caractéristique AM, A'M', il y a une relation obligée entre les plans tangents ; en prenant arbitrairement les tangentes aux courbes AC, A'C', cette relation ne sera pas satisfaite et AM, A'M' ne seraient plus une caractéristique. L'intersection des solutions S S' et T T' serait composé de deux courbes non associées, car sinon l'intersection serait une caractéristique.

Si nous voulons que S S' et T T' se coupent suivant une caractéristique et forment avec l'intersection une solution irrégulière, nous devons déterminer T et T' en nous donnant : 1° AM A'M', caractéristique

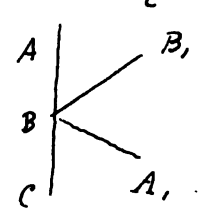
qui dépend d'une fonction arbitraire 2° l'arc AC qui dépend d'une seconde fonction arbitraire. On laissera inconnu l'arc A'C' qui dépendrait d'une troisième fonction arbitraire. On démontre par l'analyse (développement en série et fonctions majorantes) que le problème ainsi posé est possible. Supposons que la courbe AC soit formée d'un certain nombre d'arcs réguliers ; en appliquant le théorème précédent aux différents arcs, on démontre qu'il existe une solution irrégulière formée de bandeaux réguliers qui se compent suivant les caractéristiques d'un système.

34. Cas de deux séries de lignes de discontinuités. On demande de



couvrir une partie du plan des xy par deux surfaces associées satisfaisant aux équations (1) et (2); on se donne deux courbes arbitraires associées formées d'arcs réguliers projetés en AB, BC, CD.. Les arcs AB déterminent une intégrale régulière sur laquelle nous tracerons les caractéristiques AA_1, BA_1 de deux systèmes différents. Faisons de même pour BC et CD. On démontre que les caractéristiques BA_1 et BB_1 déterminent une solution régulière; nous limiterons cette solution aux caractéristiques A, A_2 et B, A_2. On trouve de même les quadrangles CB, B_2C_1, $B, A_2 A_3 B_2$ et ainsi de suite.

Remarque. Au point de vue théorique on pourrait



limiter la solution commandée par AB à la caractéristique BA_1 et la solution commandée par BC à BB_1, puis construire une troisième solution sur B, BA_1 ; il y aurait

alors trois surfaces pour chaque fonction dans l'espace B, B A, ; cette solution doit être rejeté quand on demande une surface unique pour chaque fonction.

35. Intégration approchée. Subdivisons les courbes arbitraires en arcs assez petits projetés en AB, BC, CD ; nous les supposons réguliers, mais il peut y avoir des discontinuités dans les dérivées aux points de jonction. Soit AB l'un de ces arcs ; traçons les droites AA, et BA, tangentes aux caractéristiques qui partent de A et B au moyen des équations :

pour AA, $\qquad dy = \lambda_1 \, dx$

pour BA, $\qquad \delta y = \lambda_2 \, \delta x$

Nous calculerons les ordonnées z, z' au point A, en appliquant les deux équations des caractéristiques :

pour AA, $\qquad dz + a_1 \, dz' = b_1 \, dx$

pour BB, $\qquad \delta z + a_2 \, \delta z' = b_2 \, \delta x$

On remplace les différentielles par les différences et on a deux équations pour trouver z et z' au point A,.

On peut alors perfectionner le calcul ; on détermine λ_1, λ_2 a_1, a_2 b_1, b_2 aux sommets du triangle ABA, ; si on désigne les quantités en B et A, par ' et par '' , on écrit :

$$AA_1, \quad dy = \frac{\lambda_1' + \lambda_1''}{2} \, dx$$

$$BA_1, \quad \delta y = \frac{\lambda_2' + \lambda_2''}{2} \, dx$$

$$AA_1 \qquad dz + \frac{a_1' + a_1''}{2} \, dz' = \frac{b_1' + b_1''}{2} \, dx$$

$$BA_1 \qquad \delta z + \frac{a_2' + a_2''}{2} \, \delta z' = \frac{b_2' + b_2''}{2} \, \delta x$$

On peut calculer par ces équations x, y, z, z' au point A,.

On opère de même pour les autres triangles et quadrangles.

36 Caractéristique du premier ordre. En un point d'une caractéristique les plans tangents sont indéterminés. Si cependant on donne ces plans tangents en un point initial AA', on sait les trouver tout le long de la caractéristique au moyen d'une équation différentielle que nous allons établir.
Supposons que l'on donne deux courbes associées $AM, A'M'$ et les plans tangents le long de ces courbes ; Soient F, F_1 les premiers membres des équations donnés ; en différentiant par rapport à x, on a :

$$A\frac{\partial p}{\partial x} + B\frac{\partial q}{\partial x} + C\frac{\partial p'}{\partial x} + D\frac{\partial q'}{\partial x} + \left(\frac{dF}{dx}\right) = 0$$

$$A'\frac{\partial p}{\partial x} + B'\frac{\partial q}{\partial x} + C'\frac{\partial p'}{\partial x} + D'\frac{\partial q'}{\partial x} + \left(\frac{dF_1}{dx}\right) = 0$$

où $$\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}p + \frac{\partial}{\partial z'}p'.$$

On a aussi :

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial q}{\partial x}dy = dp$$

$$\frac{\partial p'}{\partial x}dx + \frac{\partial q'}{\partial x}dy = dp'$$

Si les courbes étaient quelconques, on trouverait les quatres dérivées secondes ; nous obtiendrons une caractéristique du premier ordre en exprimant que ces dérivées sont indéterminées ; on doit, pour cela, égaler à zéro les déterminants de la matrice :

$$\begin{vmatrix} dx & dy & 0 & 0 & -dp \\ 0 & 0 & dx & dy & -dp' \\ A & B & C & D & \left(\frac{dF}{dx}\right) \\ A' & B' & C' & D' & \left(\frac{dF_1}{dx}\right) \end{vmatrix} = 0$$

Si on supprime la dernière colonne, on retrouve l'équation

en $\frac{dy}{dx}$ des caractéristiques d'ordre zéro. En supprimant l'une des trois premières colonnes, on trouve une équation différentielle qui détermine la variation des plans tangents le long d'une caractéristique. On arrive aussi à cette équation en multipliant les équations aux dérivées secondes respectivement par $\alpha, \beta, 1$ et a, coefficients déterminés par les équations (9) ; on trouve en ajoutant :

$$dp + a\,dp' = \alpha\left(\frac{dF}{dx}\right) + \beta\left(\frac{dF_1}{dx}\right) \qquad (12)$$

Les dérivées p, q, p', q' satisfont déjà aux équations (1) (2) (3) (4) qui se réduisent à trois d'entr'elles ; l'équation (12) achève de déterminer la multiplicité des plans tangents mais il faut se donner une constante arbitraire.

On peut mettre l'équation (12) sous une forme plus simple en utilisant les équations (10) et (11) dont nous désignerons les premiers membres par H et H_1, les seconds étant ramenés à zéro. En différentiant l'équation (10) par rapport à x, on trouve :

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial q}{\partial x} + a_1\left(\frac{\partial p'}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial q'}{\partial x}\right) + \left(\frac{dH}{dx}\right) = 0$$

Multiplions par dx, remplaçons $\lambda_1 dx$ par dy, on a :

$$dp + a_1\,dp_1 + \left(\frac{dH}{dx}\right)dx = 0 \qquad (13)$$

On trouve de même pour la seconde caractéristique

$$\delta p + a_2\,\delta p_1 + \left(\frac{dH_1}{dx}\right)dx = 0 \qquad (14)$$

Comme on a trois équations linéaires entre p, q, p', q', et que

$$\left(\frac{dH}{dx}\right) = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial z}p + \frac{\partial H}{\partial z'}p'$$

expression du second degré en p, q, p', q', l'équation (13) sera de la forme:

$$\frac{dp}{dx} = M p^2 + N p + P \qquad (15)$$

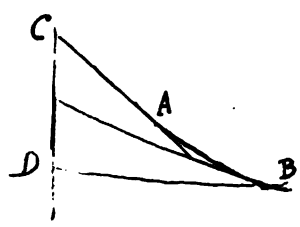
37. Contour apparent. Reprenons les équations (1) (2) (3) (4) en supposant d'abord que $dz\ dy\ dz\ dz'$ s'appliquent à deux courbes associées quelconques. Exprimons que les plans tangents sont perpendiculaires au plan des xy; nous trouverons la première équation des caractéristiques sans la seconde. On aura donc :

$$dy = \lambda_1\, dx$$

Il faudra compléter par deux équations arbitraires:

$$z = \varphi(x) \qquad z' = \psi(x)$$

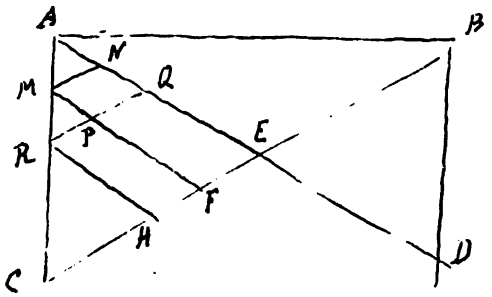
En projection sur le plan des xy, cette courbe touche les caractéristiques du système λ_1. On peut se donner cette courbe et trouver une solution. Comme cette solution dépend de deux fonctions arbitraires, il semble que l'on trouvera ainsi toutes les intégrales ; il faut remarquer cependant que le contour apparent pourrait devenir imaginaire ou se transporter à l'infini.



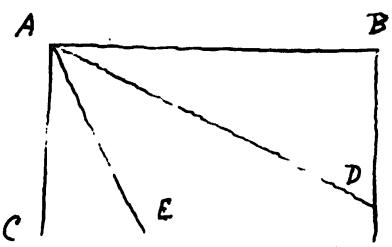
Lorsque les conditions initiales ont la disposition ordinaire, on trouvera le contour apparent par les intersections successives des caractéristiques en projection sur le plan des xy. Si on considère une caractéristique CA, si on se donne $p_0\ q_0\ p'_0\ q'_0$ en C, on trouvera le point A du contour apparent en cherchant par l'équation (15) le point où p devient infini.

38. Problèmes divers: Nous pouvons nous poser les mêmes

problèmes qu'au numéro 26. On donne comme conditions initiales les courbes des surfaces z et z' qui se projettent sur AB; on veut couvrir la partie CABD du plan des x y au moyen d'une surface unique pour chacune des fonctions z et z'. Quelles conditions arbitraires peut-on se donner sur les plans AC et BD?



Les deux courbes AB déterminent d'abord une solution que nous limiterons aux caractéristiques de systèmes opposés AE et BE et que nous construirons par la méthode ordinaire. Supposons qu'en A et en B les deux autres caractéristiques tombent en dehors de la partie du plan des x y que nous considérons. Nous couvrirons l'espace EAC au moyen d'une solution déterminée par la caractéristique AE, qui dépend d'une fonction arbitraire, et par une courbe arbitraire projetée sur AC. On se donnera par exemple z suivant AC, mais z' restera inconnu. Menons la caractéristique NM; au point M, on connaît z; on calculera z' par l'équation de la caractéristique MN.; on déterminera ensuite le quadrangle MNPQ et le bandeau MNEF. Puis on détermine le triangle MPR et le bandeau MFHR et ainsi de suite. On détermine la solution EBD. de la même manière.



Supposons que les caractéristiques du point A soient situées dans l'angle BAC et que la même disposition se produise en B. Les deux courbes AB déterminent la solution BAD.

On se donne suivant AC deux courbes arbitraires sur les deux surfaces ; on construit la solution CAC. Enfin on construit la solution EAD déterminée par deux caractéristiques. Le cas où les courbes arbitraires se projettent suivant une courbe du plan des xy donne lieu aux mêmes remarques qu'au numéro 26.

39 Exemple. Coefficients constants. Si les coefficients A, B .. D', E' sont constants, il en est de même des quantités λ, a, b.. On peut alors intégrer les équations des caractéristiques ; on trouve :

$$y - \lambda_1 x = \text{Constante}, \qquad z + a_1 z' - b_1 x = \text{Constante}$$

d'où :

$$z + a_1 z' - b_1 x = \varphi(y - \lambda_1 x)$$

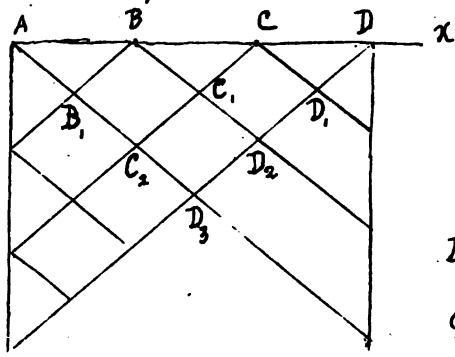
et de même :

$$z + a_2 z' - b_2 x = \psi(y - \lambda_2 x)$$

Ces deux équations déterminent les intégrales générales du problème, si φ et ψ sont arbitraires ; on démontre que les équations différentielles des caractéristiques sont satisfaites. On aurait pu aussi éliminer z' de deux équations aux dérivées partielles ; on arrive à une équation du second ordre bien connue en analyse ; c'est un cas particulier de l'équation des surfaces de translation. Nous nous proposons d'appliquer les méthodes d'intégration graphique sans tenir compte de l'analyse précédente. Nous nous donnons comme courbes arbitraires, deux polygones projetés en A B C D sur le plan des xy ; l'un de ces polygones, celui qui se rapporte à la fonction φ est représenté en élévation. Les projections horizontales des caractéristiques qui ont pour équations

$$dy = \lambda_1 dx \qquad dy = \lambda_2 dx$$

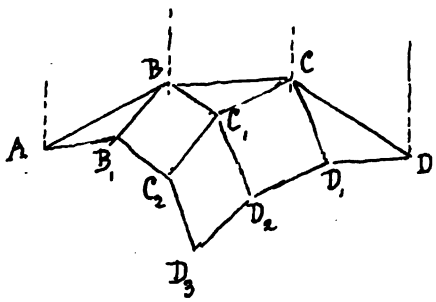
forment évidemment deux systèmes de lignes parallèles que l'on peut tracer immédiatement. Partons des côtés



projetés en BC ; on trouvera z, z' au point C_1 par les équations des caractéristiques BC_1 et CC_1 :

$$BC_1) \qquad dz + a_1\, dz_1 = b_1\, dx$$

$$CC_1) \qquad \delta z + a_2\, \delta z_1 = b_2\, \delta x$$



En remplaçant les différentielles par les accroissements, on aura deux équations déterminant z, z' au point C_1. On peut aussi prendre les accroissements comme inconnues ; si l'on adopte le symbole Δ pour les accroissements suivant le côté BC, on a :

$$\Delta z + \delta z = dz$$

$$\Delta z_1 + \delta z_1 = dz_1$$

et aussi :

$$\Delta x + \delta x = dx$$

$$\Delta y + \delta y = dy \quad , \text{ ou } \Delta y + \lambda_2 \cdot \delta x = \lambda_1\, dx$$

Remarquons que les équations entre les accroissements sont exactes d'une manière absolue. D'autre part si on réduit BC dans un certain rapport, tous les accroissements varieront dans ce rapport à cause de l'homogénéité des formules ; les triangles BCC_1 restent donc semblables à eux-mêmes quand on fait varier BC ; il faut donc que les surfaces intégrales soient des plans.

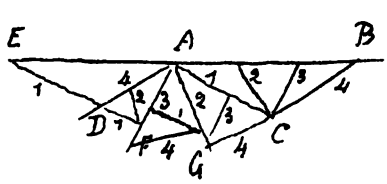
On trouve de même en ABB, deux triangles plans. On obtiendra l'intégrale $B, B C_1 C_2$ en construisant des parallélogrammes sur les côtés B, B et C, B ; car les équations des caractéristiques étant satisfaites pour les côtés B, B et C, B,

le seront aussi pour les côtés parallèles car les accroissements sont les mêmes et les coefficients de ces équations sont constants. En faisant varier BB_1 et BC_1, on trouve que les surfaces intégrales sont planes. On trouve de même le triangle CD_1D et les parallélogrammes $CD_1D_2C_1$, $C_1D_2D_3C_2$ et on continue de même. On vérifie aisément que la surface représentée en élévation est une surface de translation ; car on engendre cette surface en faisant mouvoir la caractéristique $DD_1D_2D_3$ de manière que D_3 décrive D_3C_2BA, l'autre caractéristique et que la caractéristique mobile reste égale et parallèle à elle-même.

On peut facilement résoudre pour cet exemple les différents problèmes indiqués au numéro précédent. En partant des intégrales régulières planes, on peut aussi trouver des surfaces prismatiques, comme intégrales ne présentant qu'une seule série de lignes de discontinuités. (33).

§6. Généralisation.

40. La méthode des lignes caractéristiques s'applique à toutes les équations à deux variables indépendantes. Le nombre de caractéristiques augmente avec l'ordre des équations et avec le nombre des fonctions inconnues. L'intégration graphique par les caractéristiques est toujours applicable. Supposons pour fixer les idées qu'il y ait 4 caractéristiques ; des conditions initiales AB, on déduit C en suivant 1, 2, 3, 4. On trouve de même ADE. On mène (2) et (3) par A. En exprimant que (2) et 1 peuvent engendrer DAF, que (1) et (4) peuvent engendrer GAF, que (3) et (4) peuvent engendrer CAD, on



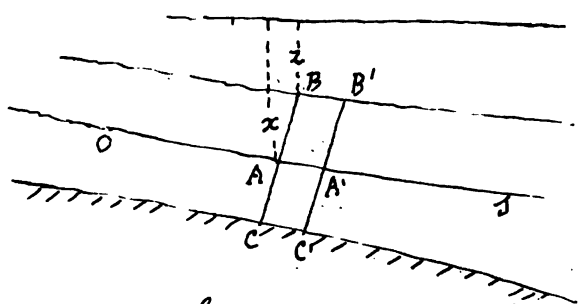
on détermine AF et AG. On trouve en A, 5 surfaces ou 5 solutions et quatre lignes de discontinuités. EAB commande l'intégrale limitée par (1) et (4) prolongés.

Chapitre III

Du mouvement varié des eaux courantes

§1. Equations du mouvement continu.

41. Equation du mouvement. Nous supposons qu'il existe un filet fluide suivant le lieu des centres de gravité des sections transversales du cours d'eau et que le débit par une section transversale



BC soit le même que si toutes les particules fluides de cette section possédaient la vitesse u du centre de gravité A de la section.

Prenons un plan horizontal de comparaison. Soient: z l'ordonnée du niveau liquide B, x l'ordonnée d'un point A de l'axe central, s la longueur OA qui sépare le point A d'un point fixe O, p la pression en A, ρ la densité, $\pi = \rho g$ le poids spécifique, ω la section transversale, χ le périmètre mouillé. On sait qu'une particule fluide se meut comme un point matériel de masse 1, sollicité par la force au point considéré et par une force fictive dont le travail virtuel est $-\frac{\delta p}{\rho}$. Prenons $\delta s = AA'$ comme déplacement virtuel. La force comprend la pesanteur dont le travail est $g\,\delta x$, le frottement qui s'exprime par $\pi \chi \varphi(u)\,ds$

pour une masse $\rho\,\omega\,ds$. On a donc en désignant l'accélération tangentielle par $\left(\frac{du}{dt}\right)$:

$$\left(\frac{du}{dt}\right) ds = g\,dx - \frac{\delta p}{\rho} - g\,\frac{\chi}{\omega}\,\varphi(u)\,ds$$

Nous admettons la loi hydrostatique :

$$p = \pi(x - z) \quad , \quad \frac{\delta p}{\rho} = g(dx - \delta z)$$

Il vient en divisant par $g\,ds$:

$$\frac{1}{g}\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\chi}{\omega}\,\varphi(u)$$

L'accélération tangentielle est la dérivée particulière de la vitesse, que l'on obtient en suivant la particule fluide dans son mouvement ; on a donc

$$(du) = \frac{\partial u}{\partial s}\,ds + \frac{\partial u}{\partial t}\,dt \quad \text{pour } ds = u\,dt$$

d'où

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = u\,\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

L'équation du mouvement devient :

$$\frac{\partial z}{\partial s} - \frac{u}{g}\,\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{1}{g}\,\frac{\partial u}{\partial t} = b\,u^2 \qquad (1)$$

Nous avons posé : $b\,u^2 = \frac{\chi}{\omega}\,\varphi(u)$

On peut prendre $b = \frac{a}{R}$, $a = \alpha + \frac{\beta}{R}$, $R = \frac{\omega}{\chi}$

d'après Darcy et Bazin, ou la nouvelle formule de Bazin : $b = \frac{b_1}{R}$, $\sqrt{R}\,b_1 = 0{,}0115\left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}\right)$

ou l'ancienne formule de Prony :

$$b = \frac{b_1}{R} \qquad b_1 = 0{,}0004.$$

Si la vitesse u devenait négative, ce qui se présente dans les fleuves à marée, le coefficient b, ou les coefficients a ou b, prendront évidemment le signe de u.

42. Equation de continuité. Lorsqu'il ne se forme pas de vide dans le liquide, le volume $\omega\,\delta s$ d'une tranche doit rester constant dans le temps ; on a donc

$$\left(\frac{d}{dt}\right)\omega\,\delta s = 0 \quad \text{ou bien} \quad \left(\frac{d\omega}{dt}\right)\delta s + \omega\,\delta u = 0$$

Or on a:

$$(d\omega) = \frac{\partial\omega}{\partial t}\,dt + \frac{\partial\omega}{\partial s}\,ds \qquad \text{pour } ds = u\,dt$$

L'équation de continuité devient donc en la divisant par δs

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + u\,\frac{\partial\omega}{\partial s} + \omega\,\frac{\partial u}{\partial s} = 0$$

On arrive aussi à cette équation en exprimant de deux manières l'accroissement du volume compris entre deux sections fixes s, $s+\delta s$: 1° par l'augmentation de section, 2° par les vitesses ; on trouve

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}\,dt\,\delta s = \omega u\,dt - \left(\omega u + \frac{\partial\omega u}{\partial s}\,\delta s\right)dt$$

ou bien

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial\omega u}{\partial s} = 0$$

Soient : l, la largeur de la rivière au niveau du liquide; ml, la dérivée de la section par rapport à s, en supposant z constant ; on a:

$$\frac{\partial\omega}{\partial s} = -l\,\frac{\partial z}{\partial s} + ml\,, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial t} = -l\,\frac{\partial z}{\partial t}$$

Si on introduit ces valeurs dans l'équation de continuité on trouve en divisant par $-l$:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + u\,\frac{\partial z}{\partial s} - h\,\frac{\partial u}{\partial s} = mu \qquad (2)$$

Nous avons posé

$$h = \frac{\omega}{\ell}, \quad m = \frac{1}{\ell}\frac{\partial \omega}{\partial z}, \text{ pour } dz = 0 \qquad (3)$$

43. Transformation des équations. Les deux équations du mouvement varié sont les équations (1) et (2). Les quantités b, h, m sont des fonctions de z et de s qui dépendent de la forme du lit de la rivière. On a donc un système de deux équations simultanées, aux dérivées partielles, à deux fonctions inconnues et à deux variables indépendantes s, t. Les fonctions inconnues sont z et u. On peut exprimer u au moyen du débit $q = \omega u$; les fonctions inconnues deviennent q et z.

On peut aussi introduire la hauteur d'eau H au-dessus du fond du lit. Soit x_0, l'ordonnée du fond du lit; on a:

$$z = x_0 - H, \quad \frac{\partial x_0}{\partial s} = i$$

en supposant H vertical. On en déduit:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \qquad \frac{\partial z}{\partial s} = i - \frac{\partial H}{\partial s}$$

Nous poserons alors:

$$\frac{\partial \omega}{\partial z}, \text{ pour } dH = 0, \quad = n\ell$$

d'où l'on tire:

$$m = i + n$$

Les deux équations du mouvement deviennent alors:

$$\frac{\partial H}{\partial s} + \frac{u}{g}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t} = i - bu^2 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + h\frac{\partial u}{\partial s} + u\frac{\partial H}{\partial s} = -nu \qquad (5)$$

Les quantités b, h, i, n sont alors des fonctions de H et s; on a deux équations aux dérivées partielles

à deux fonctions inconnues H et u, ou bien H et q en introduisant le débit.
Lorsque le lit est prismatique, i est constant et n est nul. L'équation (5) se simplifie.

§2. Ressaut varié. Vitesse de l'onde.

44. Historique. Newton, Lagrange, Scott Russel, Barin.(x) Newton est le premier qui ait essayé une théorie des ondes en assimilant ce phénomène à l'oscillation d'une colonne liquide pesante dans un siphon renversé, ou enfin à l'oscillation du pendule; mais l'insuffisance de cette théorie est aujourd'hui bien reconnue.
Lagrange a établi dans sa mécanique analytique que la vitesse de propagation des ondes dans un canal peu profond à fond horizontal est

$$v = \sqrt{gH}$$

H étant la profondeur. Cette conclusion suppose que l'onde a un faible relief au-dessus du plan moyen du liquide, et que les vitesses horizontales des molécules liquides sont infiniment petites.
Scott Russel (1843) a étudié expérimentalement le mouvement d'une vague solitaire qui se propage dans une eau tranquille et a reconnu la formule

$$v = \sqrt{g(H+E)}$$

H étant la profondeur du canal et E la hauteur du sommet de la vague au-dessus du plan d'eau normal.

(x) Collignon. Hydraulique. 1870 p. 304 -
Newton. Principes, L II. Sect. VIII, Prop. 44, 45, 46
Lagrange. Mécanique analytique, Seconde partie, Section XI, 35 et suiv.

Lorsqu'un liquide étranger afflue pendant un certain temps dans un canal, il se forme une tranche liquide qui se propage à la surface de l'eau. M. Bazin a établi la formule empirique suivante:

$$v = \sqrt{g(H+\varepsilon)} + u$$

H est la profondeur normale du canal,
ε est la hauteur de l'onde,
u la vitesse moyenne de l'eau,
v la vitesse de propagation de l'onde.
M. Bazin a établi un certain rapprochement entre la vitesse de l'onde et le phénomène du ressaut. On sait que la condition de possibilité du ressaut est

$$u > \sqrt{gH}$$

Cette inégalité indique que la vitesse du courant est supérieure à la vitesse de l'onde; de sorte que cette onde qui tend à se propager dans les deux sens, ne peut se propager vers l'amont, parce que l'excès de vitesse du courant l'entraîne vers l'aval. M. Bazin a constaté de plus que si l'on diminue subitement la vitesse de l'écoulement, le ressaut se transforme en une onde qui se propage vers l'amont.

"Ce rapprochement, ajoute-t-il, n'a rien de rigoureux; néanmoins, il présente quelque intérêt comme établissant une corrélation entre deux ordres de faits bien différents."

Malgré l'autorité du célèbre hydraulicien français, nous nous permettons d'exprimer une opinion contraire à la sienne. A notre avis le ressaut et la

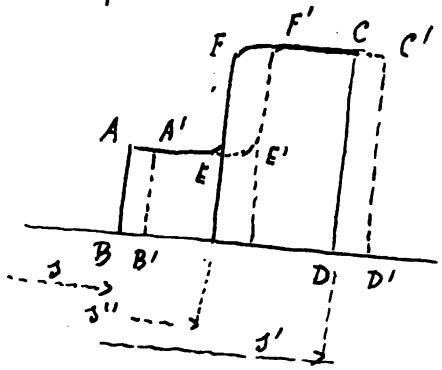
propagation de l'onde ne sont pas deux ordres de faits bien différents, ce sont deux cas d'un même phénomène ; le ressaut est une onde dont la vitesse de propagation est nulle ; l'onde est un ressaut varié ou mobile.

On nous objectera sans doute que si on égale la vitesse de l'onde à zéro, on trouve :

$$\sqrt{g(H+\varepsilon)} + u = 0 \qquad H + \varepsilon = \frac{u^2}{g}$$

formule qui n'est pas la formule du ressaut. Mais cela tient à ce que la formule qui donne la vitesse de l'onde est une formule empirique qui n'exprime pas complètement l'influence de tous les éléments de la section. Nous allons établir la théorie du ressaut varié ; nous obtiendrons une formule qui nous donnera la vitesse de l'onde et la hauteur du ressaut en égalant cette vitesse à zéro.

45. Equations du ressaut varié ou propagation des ondes. Soient :



A E F C, une onde ; v, la vitesse avec laquelle l'onde se déplace vers l'aval ; ω, u la section et la vitesse à l'amont du ressaut en AB ; ω', u' ces éléments pour une section S' à l'aval du ressaut ; S'' la section où le ressaut se produit à l'instant t. Isolons la masse fluide A B D C et appliquons à cette masse le principe des quantités de mouvement projetés sur un axe. Nous prendrons comme axe de projection un axe parallèle aux vitesses ou même un axe horizontal. Les vitesses font avec l'horizon un angle si petit, qu'on peut prendre 1 comme

cosinus de projection. Nous ferons ensuite converger $s''-s$ et $s'-s''$ vers zéro. La quantité de mouvement de la masse fluide est

$$\frac{\pi}{g}\,\omega u\,(s''-s) + \frac{\pi}{g}\,\omega' u'\,(s'-s'')$$

La différentielle par rapport au temps s'obtient en remarquant que

$$ds = u\,dt\ , \quad ds'' = v\,dt\ , \quad ds' = u'\,dt$$

On trouve :

$$\frac{\pi}{g}\,\omega u(v-u)\,dt + \frac{\pi}{g}\,\omega' u'(u'-v)\,dt = -\frac{\pi\,dt}{g}\,\Delta[\omega u(v-u)]$$

Nous avons réduit immédiatement à zéro les termes qui contiennent encore $s''-s$ et $s'-s''$. Nous désignons par Δ l'accroissement en passant de l'amont à l'aval de l'onde.

L'impulsion de la pesanteur, des pressions des parois, des frottements disparaîtront en annulant $s'-s$; les impulsions des pressions extrêmes ont pour valeur

$$\pi\,\omega\eta\,dt - \pi\,\omega'\eta'\,dt = -\pi\,dt\ \Delta\omega\eta$$

$$\eta = x - z\ , \qquad \eta' = x' - z'$$

L'équation des quantités de mouvement devient donc :

$$\Delta\,\frac{\omega u(v-u)}{g} = \Delta\,\omega\eta \qquad (6)$$

A cette équation, il faut joindre l'équation de continuité que l'on obtient en exprimant que le volume de la masse fluide ABDC ne change pas ; on a :

$$d\,[\omega(s''-s') + \omega'(s'-s'')] = 0$$

ou bien

$$\omega(v-u)\,dt + \omega'(u'-v)\,dt = 0$$

ou

$$\Delta\,[\omega(v-u)] = 0 \qquad (7)$$

46. Remarque. Il peut être utile de remarquer qu'en appliquant le théorème des quantités de mouvement à une étendue finie $s_1 - s_0$ du canal contenant un ressaut, on trouve en une fois l'équation du mouvement continu et l'équation du ressaut. Prenons un axe horizontal comme axe de projection ; les quantités de mouvement projetées sont très-approximativement égales aux quantités de mouvement elles-mêmes. La quantité de mouvement d'une tranche $\omega\, ds$ a pour différentielle :

$$\left(\frac{d}{dt}\right) \frac{\pi}{g}\, \omega\, ds\, u.\, dt = \frac{\pi}{g}\, \omega \left(\frac{du}{dt}\right) ds\, dt$$

L'accroissement élémentaire des quantités de mouvement s'obtient en intégrant cette expression de s_0 à s_1 et en y ajoutant l'accroissement dû au déplacement de l'onde. A l'aval de l'onde il y a suppression d'une tranche de longueur $(v-u')\,dt$; à l'amont il y a une nouvelle tranche de longueur $(v-u)\,dt$; il en résulte pour les quantités de mouvement un accroissement :

$$\frac{\pi}{g}\, \omega\, (v-u)\, u\, dt - \frac{\pi'}{g}\, \omega' (v-u') u' dt = \frac{\pi}{g}\, dt.\, \Delta[\omega (u-v) u]$$

On trouve facilement que l'impulsion de la pesanteur est nulle, que l'impulsion des pressions est pour une tranche $\pi\, \omega\, dz\, dt$ mais qu'il faut ajouter pour tenir compte de la discontinuité le terme $-\pi\, dt\, \Delta(\omega\eta)$, que l'impulsion des frottements est pour une tranche $\pi X\, \varphi(\omega)\, ds\, dt$. Finalement on trouve, en divisant par $\pi\, dt$, l'équation :

$$\Delta \frac{\omega (u-v) u}{g} = -\Delta(\omega\eta) + \int_{s_0}^{s_1} F\, \omega\, ds$$

$$F = \frac{dz}{ds} - \frac{1}{g}\left(\frac{du}{dt}\right) - b u^2$$

En faisant $s_0 = s_1 = s''$ on trouve l'équation du ressaut varié. En prenant $s_1 - s_0 = ds$, on trouve $i = 0$, équation du mouvement continu.

4° Résolution des équations. A cause de l'équation (7) on peut dans l'équation (6) traiter $\omega(u-v)$ comme constant; l'équation (6) devient donc :

$$\frac{\omega(v-u)}{g}\Delta u = \Delta(\omega\eta)$$

L'équation (7) peut s'écrire :

$$(v-u)\,\Delta\omega = \omega'\,\Delta u$$

En éliminant Δu entre les deux précédentes, on trouve :

$$\frac{(v-u)^2}{g}\,\frac{\omega\,\Delta\omega}{\omega'} = \Delta(\omega\eta)$$

On trouve finalement la vitesse de l'onde :

$$v = u \pm \sqrt{g h_1} \qquad h_1 = \frac{\omega'\,\Delta(\omega\eta)}{\omega\,\Delta\omega} \qquad (8)$$

On peut aussi calculer Δu ; on a

$$\Delta u = \frac{\Delta\omega}{\omega'}(v-u) = \pm\frac{\Delta\omega}{\omega'}\sqrt{g\,\frac{\omega'}{\omega}\,\frac{\Delta(\omega\eta)}{\Delta\omega}}$$

S'il s'agit d'un ressaut d'élévation $\Delta\omega$ est positif, et l'on a :

$$u' = u \pm \sqrt{g\,\frac{\Delta\omega\;\Delta(\omega\eta)}{\omega\;\omega'}} \qquad (9)$$

S'il s'agit d'un ressaut d'abaissement $\Delta\omega$ est négatif on doit prendre le signe $\mp$.

Enfin on peut calculer la vitesse du ressaut en fonction de la vitesse u' ; on a :

$$\Delta\omega(v-u) = v \qquad v - u' = \frac{\omega}{\omega'}(v-u) = \sqrt{g\,\frac{\omega\,\Delta(\omega\eta)}{\omega'\,\Delta\omega}}$$

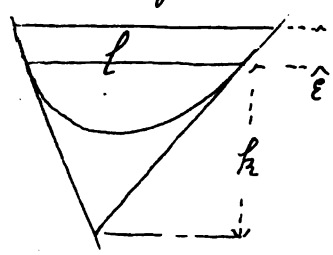
d'où

$$v = u' \pm \sqrt{g h_2}\,, \qquad h_2 = \frac{\omega\, \Delta(\omega\eta)}{\omega'\, \Delta\omega} \qquad (10)$$

On a aussi :

$$h_2 = \frac{\omega^2}{\omega'^2} h_1 \qquad (11)$$

48. Développement en série. Soient : ε la hauteur de l'onde, H la profondeur totale ; on a évidemment :



$$\omega = \int_0^H l\, dH.$$

Soient : $l' = \frac{\partial l}{\partial H} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial H^2}$, $l'' = \frac{\partial^2 l}{\partial H^2}$, ...

On a par la formule de Taylor :

$$\omega' = \omega + l\varepsilon + \frac{l'\varepsilon^2}{2} + \cdots$$

$$\Delta\omega = l\varepsilon + \frac{l'\varepsilon^2}{2} + \cdots$$

Le moment $\omega\eta$ a pour valeur $\int_0^H \omega\, dH$; on a donc :

$$\Delta(\omega\eta) = \omega\varepsilon + l\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{l'\varepsilon^3}{6}$$

La valeur de h_1 devient alors :

$$h_1 = \frac{\left(\omega + l\varepsilon + l'\frac{\varepsilon^2}{2} + \cdots\right)\left(\omega + \frac{l\varepsilon}{2} + \frac{l'\varepsilon^2}{6} + \cdots\right)}{\omega\left(l + l'\frac{\varepsilon}{2} + \cdots\right)} \qquad (12)$$

Les termes indiqués par des points disparaissent quand les parois ont un profil rectiligne entre les deux hauteurs d'eau. Nous poserons alors :

$$\omega = h l \qquad l' h = l \qquad (13)$$

h est la profondeur moyenne ; k est la profondeur à laquelle les talus se rencontreraient s'ils étaient prolongés vers le bas. On a alors :

$$h_1 = \frac{\left(h + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2k}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon}{2h} + \frac{\varepsilon^2}{6hk}\right)}{1 + \frac{\varepsilon}{2k}} \qquad (14)$$

Si nous supposons que ε soit une petite quantité vis-à-vis

de h et de k, on peut écrire :

$$\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{2k}} = 1 - \frac{\varepsilon}{2k} - \frac{\varepsilon^2}{4k^2}$$

et en supprimant les termes d'ordre supérieur au second dans l'équation (14), on trouve :

$$h_1 = h + \frac{\varepsilon}{2}\left(3 - \frac{h}{k}\right) + \frac{\varepsilon^2}{h}\left(\frac{1}{2} - \frac{h}{12k} - \frac{h^2}{4k^2}\right) \qquad (15)$$

Enfin si les parois sont verticales, on a :

$$h_1 = (h+\varepsilon)\left(1 + \frac{\varepsilon}{2h}\right) \qquad (16)$$

Dans une section rectangulaire h est égale à la profondeur H. Si on transforme de la même manière la valeur de h_2, on trouve : $h_2 = \dfrac{\omega\left(\omega + \frac{l\varepsilon}{2} + \frac{l'\varepsilon^2}{6}..\right)}{\left(\omega + l\varepsilon + l'\frac{\varepsilon^2}{2}+..\right)\left(f + l'\frac{\varepsilon}{2}+...\right)}$

parois rectilignes : $h_2 = \dfrac{h + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{6k}}{\left(1+\frac{\varepsilon}{h} + \frac{\varepsilon^2}{2hk}\right)\left(1+\frac{\varepsilon}{2k}\right)}$

parois verticales : $h_2 = \dfrac{h+\frac{\varepsilon}{2}}{1+\frac{\varepsilon}{h}}$

On pourrait aussi développer en partant de ω', pour $\Delta H = -\varepsilon$; on trouve pour h_1 et h_2 des formules analogues aux précédentes pour h_2 et h_1. Il suffit d'ailleurs de changer le sens des s pour rentrer dans le cas précédent.

Toutes les formules que nous venons d'établir s'appliquent au ressaut d'abaissement ; il suffit de considérer ε comme négatif. Nous pouvons aussi transformer le ressaut d'abaissement en un ressaut d'élévation en changeant le sens des s et appliquer la formule :

$$v = u \pm \sqrt{g h_1} \qquad h_1 = \frac{\omega' \Delta\omega_1}{\omega . \Delta\omega} \qquad (8)$$

Dans cette formule ω, u, y s'applique à la plus petite section.

4° Onde infiniment petite. En faisant tendre ε vers zéro, nous obtiendrons la vitesse d'une onde infiniment petite. Les formules (8) et (12) deviennent :

$$v = u \pm \sqrt{g h_1} \qquad h_1 = h$$

On a donc :

$$v = u \pm \sqrt{g h}$$

La vitesse relative de l'onde infiniment petite par rapport au courant est donc $\pm \sqrt{gh}$. On peut donc considérer une onde d'aval ; elle se propage vers l'amont avec une vitesse relative $\sqrt{gh}$; sa vitesse absolue est

$$v = u - \sqrt{g h}$$

Cette vitesse est généralement négative ; de sorte que l'onde remonte la rivière avec une vitesse $\sqrt{gh} - u$. Cependant dans les cours d'eau à grandes vitesses, on peut avoir

$$u > \sqrt{gh}$$

alors l'onde d'aval tout en remontant le courant avec une vitesse relative $\sqrt{gh}$ continue à descendre la rivière avec la vitesse v qui est positive. Il y a aussi à considérer une onde d'amont qui se propage vers l'aval avec une vitesse

$$v = u + \sqrt{gh}$$

La formule (9) donne aussi :

$$u' = u \pm \varepsilon \sqrt{\frac{g}{h}}$$

§ 3. Caractéristiques des équations du mouvement varié.

50. Caractéristique d'intersection ou d'ordre zéro. Reprenons les deux équations du mouvement varié :

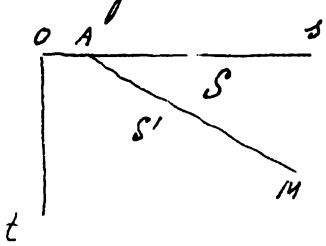
$$\frac{\partial z}{\partial s} - \frac{u}{g}\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t} = bu^2 \qquad (1)$$

$$u\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial t} - h\frac{\partial u}{\partial s} = mu \qquad (2)$$

h, m, b = fonct (z, s)

Ce sont deux équations linéaires aux dérivées partielles semblables à celles que nous avons considérées au numéro 31. Nous allons y appliquer la méthode qui conduit aux caractéristiques de ces équations.

Si nous portons s et t en coordonnées dans un plan horizontal, z à partir de ce plan ou d'un autre plan de comparaison, nous pourrons représenter z par une surface que nous appellerons la surface hydraulique ; c'est la surface engendrée par les différents axes hydrauliques du canal lorsque l'on porte le temps suivant un axe perpendiculaire au profil en long. En portant la vitesse u en ordonnée perpendiculaire au plan des (s,t) nous aurons une seconde surface, la surface des vitesses, surface associée à la première. Si on donne deux courbes arbitraires associées l'une sur chaque surface, on déterminera une intégrale régulière, si les courbes données sont régulières. On peut par exemple se donner l'axe hydraulique initial et les vitesses initiales pour $t = 0$.



On peut tracer deux courbes associées, c'est-à-dire ayant même projection AM, et telles que suivant ces courbes il passe une infinité de solutions régulières de telle sorte qu'on peut constituer une solution irrégulière en prenant deux surfaces hydrauliques S et S' se coupant suivant la courbe projetée en AM et accompagnées de deux surfaces de vitesse associées se coupant aussi suivant une courbe projetée en AM. L'ensemble de ces surfaces sera une solution applicable au cas où il y en A des discontinuités dans les dérivées premières ou autres de l'axe hydraulique initial. Les courbes AM forment une caractéristique ; les caractéristiques sont les lignes suivant lesquelles se propagent les discontinuités des conditions initiales.
Les éléments de la caractéristique satisfont aux équations:

$$\frac{\partial z}{\partial s}\,ds + \frac{\partial z}{\partial t}\,dt = dz \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}\,ds + \frac{\partial u}{\partial t}\,dt = du \qquad (4)$$

Si on prenait arbitrairement les courbes AM, on pourrait résoudre les équations (1), (2), (3), (4) par rapport aux dérivées partielles ; les courbes formeront une caractéristique, si ces dérivées partielles sont indéterminées ; on obtiendra donc les équations de la caractéristique en égalant à zéro les déterminants de la matrice

$$\begin{vmatrix} ds & dt & 0 & 0 & dz \\ 0 & 0 & ds & dt & du \\ 1 & 0 & -\frac{u}{g} & -\frac{1}{g} & bu^2 \\ u & 1 & -h & 0 & mu \end{vmatrix} = 0$$

On sait que ces équations se réduisent à deux ; en

supprimant la dernière colonne, puis la 4ème, on trouve les deux équations qui sont écrites plus bas. Nous les obtiendrons par la méthode des coefficients indéterminés.

Multiplions les équations (1) (2) (3) (4) respectivement par $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$; ajoutons et exprimons qu'on trouve une identité ; on trouve :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta u + d\gamma &= 0 \\ \beta + d\varepsilon &= 0 \\ -\alpha \frac{u}{g} - \beta h + \varphi\, d\gamma &= 0 \\ \frac{-\alpha}{g} + \gamma\, d\varepsilon &= 0 \end{aligned}$$

$$dz + \varphi\, du + \alpha\, b u^2 + \beta m u = 0$$

Des deux premières et de la quatrième, on tire :

$$\beta = -d\varepsilon \quad , \quad \alpha = -(d\gamma - u\,d\varepsilon) \quad , \quad \gamma = -\frac{d\gamma - u\,d\varepsilon}{g\,d\varepsilon}$$

En substituant dans la 3ème et la 5ème, on trouve les deux équations cherchées. La 3ème donne :

$$\frac{u}{g}(d\gamma - u\,d\varepsilon) + h\,d\varepsilon - \frac{d\gamma - u\,d\varepsilon}{g}\frac{d\gamma}{d\varepsilon} = 0$$

ou bien

$$(d\gamma - u\,d\varepsilon)^2 - g h\, d\varepsilon^2 = 0$$

d'où

$$\frac{d\gamma}{d\varepsilon} = u \pm \sqrt{g h}$$

Nous trouvons deux systèmes de caractéristiques ; les deux valeurs de $\frac{d\gamma}{d\varepsilon}$ sont les deux vitesses d'ondes infiniment petites que nous avons déduites des formules du ressaut varié. Nous arrivons donc ainsi au théorème que nous avions annoncé dans un autre mémoire : les caractéristiques représentent le mouvement de deux ondes infiniment petites, l'onde

d'amont, l'onde d'aval.(x)

Les valeurs de α, β, γ deviennent alors :

$$\alpha = \mp \sqrt{gh}\, dt, \quad \beta = -dt, \quad \gamma = \mp \sqrt{\frac{h}{g}} \qquad (5)$$

La 5ème des équations en α, β, γ devient :

$$dz \mp \sqrt{\frac{h}{g}}\, du = \left(\pm \sqrt{gh}\, bu^2 + mu\right) dt \qquad (6)$$

Nous trouvons, en prenant les signes supérieurs :

$$\left.\begin{aligned} \delta s &= (u + \sqrt{gh})\, \delta t \\ \delta z - \sqrt{\frac{h}{g}}\, \delta u &= (\sqrt{gh}\, bu^2 + mu)\, dt \end{aligned}\right\} (7)$$

en prenant les signes inférieurs :

$$\left.\begin{aligned} ds &= (u - \sqrt{gh})\, dt \\ dz + \sqrt{\frac{h}{g}}\, du &= (-\sqrt{gh}\, bu^2 + mu)\, dt \end{aligned}\right\} (8)$$

51. Transformation des équations. Nous aurions pu prendre les équations (4) (5) du numéro 43 obtenue en prenant

$$z = x_0 - H \qquad \frac{\partial x_0}{\partial s} = i$$

Mais il suffit de changer de variables dans les équations des caractéristiques, car les propriétés des caractéristiques sont indépendantes des variables ; on a :

$$\frac{\partial z}{\partial s} = i - \frac{\partial H}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}, \quad m = i + n$$

$$dz = i\, ds - dH = i\,(u - \sqrt{gh})\, dt - dH.$$

(x) Appendice au mémoire sur l'intégration graphique 1890. p. 255.

On trouve alors pour la caractéristique (8) ou d'aval :

$$\left.\begin{aligned} ds &= (u - \sqrt{gh})\,dt \\ -dH + \sqrt{\frac{h}{g}}\,du &= (i - bu^2)\sqrt{gh}\,dt + n u\,dt \end{aligned}\right\} (9)$$

57. Caractéristique du premier ordre. Mettons les équations du mouvement varié sous la forme :

$$\frac{\partial z}{\partial s} - \frac{u}{g}\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t} - bu^2 = F = 0$$

$$u\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial t} - h\frac{\partial u}{\partial s} - mu = F_1 = 0$$

Prenons les dérivées par rapport à t ; on a :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s\,\partial t} - \frac{u}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial t} - \frac{1}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\left(\frac{dF}{dt}\right)$$

$$u\frac{\partial^2 z}{\partial s\,\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - h\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial t} = -\left(\frac{dF_1}{dt}\right)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

On a aussi en suivant deux courbes associées :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s\,\partial t}\,ds + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\,dt = d\,\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial t}\,ds + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dt = d\,\frac{\partial u}{\partial t}$$

Des quatre équations précédentes, on peut tirer les dérivées secondes, si les courbes sont quelconques. On obtiendra une caractéristique du premier ordre en exprimant que ces dérivées secondes sont indéterminées, ce qui conduit à égaler à zéro les déterminants de la matrice :

$$\begin{vmatrix} ds & dt & 0 & 0 & d\frac{\partial z}{\partial t} \\ 0 & 0 & ds & dt & d\frac{\partial u}{\partial t} \\ 1 & 0 & -\frac{u}{g} & -\frac{1}{g} & -\left(\frac{dF}{dt}\right) \\ u & 1 & -h & 0 & -\left(\frac{dF_1}{dt}\right) \end{vmatrix} = 0$$

Les équations se réduisent à deux ; en supprimant la dernière colonne, on trouve la même équation que pour la caractéristique d'ordre zéro. En prenant les trois premières et la quatrième, on trouve aussi la même équation que pour la caractéristique d'ordre zéro, sauf qu'il faut remplacer

	dz	du	bu^2	mu
par	$d\frac{\partial z}{\partial t}$	$d\frac{\partial u}{\partial t}$	$-\left(\frac{dF}{dt}\right)$	$-\left(\frac{dF_1}{dt}\right)$.

Si on emploie la méthode des coefficients indéterminés on trouve les quatre premières équations en α, β, γ du numéro 50, mais la dernière est :

$$\alpha\frac{\partial z}{\partial t} + \gamma\,\alpha\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\left(\frac{dF}{dt}\right) + \beta\left(\frac{dF_1}{dt}\right)$$

d'où

$$\alpha\frac{\partial z}{\partial t} \mp \sqrt{\frac{h}{g}}\,\alpha\frac{\partial u}{\partial t} = \left[\mp\left(\frac{dF}{dt}\right)\sqrt{gh} - \left(\frac{dF_1}{dt}\right)\right]dt$$

A cette équation, il faut joindre les équations (1) (2) (3) (4) entre les dérivées premières ; ces quatre équations se ramènent à 3 et de l'équation précédente, on tire une équation de la forme :

$$\alpha\frac{\partial z}{dt} = A\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 + B\frac{\partial z}{\partial t} + C$$

52 Transformation des équations. Prenons les équations du mouvement sous la forme :

$$-\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{u}{g}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t} + i - bu^2 = F = 0 \qquad (1)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial t} - u\frac{\partial H}{\partial s} - h\frac{\partial u}{\partial s} - nu = F_1 = 0 \qquad (2)$$

On trouve alors:

$$-d\frac{\partial H}{\partial t} \mp \sqrt{\frac{h}{g}}\, d\frac{\partial u}{\partial t} = \left[\mp\left(\frac{dF}{dt}\right)\sqrt{gh} - \left(\frac{dF_1}{dt}\right)\right] dt$$

soit en refaisant les calculs, soit en transformant l'équation du numéro précédent. On a pour la seconde caractéristique, ou la caractéristique d'aval

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial t} + \sqrt{\frac{h}{g}}\,\frac{d}{dt}\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{dF}{dt}\right)\sqrt{gh} - \left(\frac{dF_1}{dt}\right) \qquad (10)$$

On a:

$$\left(\frac{dF}{dt}\right) = -\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial s} - 2bu\frac{\partial u}{\partial t} - b'u^2\frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\left(\frac{dF_1}{dt}\right) = -\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial H}{\partial s} - \frac{\partial h}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial s} - n\frac{\partial u}{\partial t} - un'\frac{\partial H}{\partial t}$$

Nous avons posé: $\frac{\partial b}{\partial H} = b' \qquad \frac{\partial n}{\partial H} = n'$

Calcul des dérivées partielles. Nous allons calculer toutes les dérivées partielles en fonction de la dérivée $\frac{\partial H}{\partial t}$; à cet effet nous prendrons les deux équations du mouvement varié $F=0$ et $F_1=0$ et l'équation:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial s}\frac{ds}{dt} = \frac{dH}{dt} \qquad \frac{ds}{dt} = u - \sqrt{gh}$$

Le symbole d s'applique à une différentiation suivant la caractéristique. On a d'abord:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \left(\frac{dH}{dt} - \frac{\partial H}{\partial t}\right)\frac{dt}{ds}$$

De l'équation $F_1=0$, on tire alors:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \sqrt{\frac{g}{h}}\,\frac{dt}{ds}\,\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{u}{h}\frac{dt}{ds}\frac{dH}{dt} - \frac{nu}{h}$$

De l'équation $F=0$, on tire après quelques réductions :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\sqrt{\frac{g}{h}}\,\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{h}\,\frac{dH}{dt}\,(u+\sqrt{gh}) + \frac{nu^2}{h} + g(i-bu^2)$$

Nous écrirons ces trois valeurs sous la forme :

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{\partial H}{\partial t}\,\frac{dt}{ds} + \frac{dH}{ds}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \sqrt{\frac{g}{h}}\,\frac{dt}{ds}\,\frac{\partial H}{\partial t} - R$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\sqrt{\frac{g}{h}}\,\frac{\partial H}{\partial t} + S$$

Nous avons posé :

$$R = \frac{u}{h}\left(\frac{dH}{ds} + n\right)$$

(11)
$$\begin{cases} S = Ru + g\left(i - bu^2 - \dfrac{dH}{ds}\right) = \dfrac{nu^2}{h} + g(i-bu^2) - g\,\dfrac{dH}{ds}\left(1 - \dfrac{u^2}{gh}\right) \end{cases}$$

Calcul du second membre de l'équation (10). Nous pouvons remplacer les dérivées partielles par leurs valeurs dans les expressions de $\left(\frac{dF}{dt}\right)$ et $\left(\frac{dF_1}{dt}\right)$; on obtient alors :

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)\sqrt{gh} - \left(\frac{dF_1}{dt}\right) = \sqrt{\frac{g}{h}}\,\frac{dt}{ds}\left[2\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial H}{\partial t}\,\frac{\partial h}{\partial t}\right]$$

$$- \frac{\partial H}{\partial t}\left[R + 2S\frac{dt}{ds} - 2gbu + b'u^2\sqrt{gh} + \sqrt{\frac{g}{h}}\,\frac{dH}{ds} + n\sqrt{\frac{g}{h}} - un'\right].$$

$$- \frac{\partial h}{\partial t}\,R + RS\sqrt{\frac{h}{g}} - 2buS\sqrt{gh} + S\frac{dH}{ds} + nS$$

Nous devons calculer $\frac{\partial h}{\partial t}$ en fonction de $\frac{\partial H}{\partial t}$; nous avons posé :

$$\omega = \ell h$$

Prenons la dérivée par rapport à H, on trouve :

$$\ell = \ell' h + \ell\frac{\partial h}{\partial H}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial h}{\partial H} = 1 - \frac{h}{K}$$

Il vient alors :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial H}\,\frac{\partial H}{\partial t} = \left(1 - \frac{h}{k}\right)\frac{\partial H}{\partial t}$$

La valeur du second membre de l'équation devient:

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)\sqrt{gh} - \frac{dF_1}{dt} = \sqrt{\frac{g}{h}}\,\frac{dt}{ds}\left(3 - \frac{h}{k}\right)\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)^2$$

$$- \frac{\partial H}{\partial t}\left[R\left(2 - \frac{h}{k} + \frac{\sqrt{gh}}{u}\right) + 2S\frac{dt}{ds} - 2gbu + b'u^2\sqrt{gh^2} - un'\right]$$

$$+ \frac{RSh}{u}\left(1 + \frac{u}{\sqrt{gh}}\right) - 2bu\,S\sqrt{gh}$$

Calcul du premier membre de l'équation (10). De la valeur de $\frac{\partial u}{\partial t}$, on tire: $d\,\frac{\partial u}{\partial t} = -\sqrt{\frac{g}{h}}\,d\,\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{1}{2h}\sqrt{\frac{g}{h}}\,\frac{\partial H}{\partial t}\,dh + dS$

On a: $dh = \frac{\partial h}{\partial s}\,ds + \frac{\partial h}{\partial H}\,dH$

Nous avons trouvé $\frac{\partial h}{\partial H}$ précédemment; nous devons calculer $\frac{\partial h}{\partial s}$; reprenons $\omega = lh$

D'où l'on tire: $\frac{\partial \omega}{\partial s} = nl = l\frac{\partial h}{\partial s} + h\frac{\partial l}{\partial s}$

Posons $\frac{\partial l}{\partial s}\,r = l$

On tire: $\frac{\partial h}{\partial s} = n - \frac{h}{r}$.

et puis $\frac{dh}{dt} = \left(n - \frac{h}{r}\right)\frac{ds}{dt} + \left(1 - \frac{h}{k}\right)\frac{dH}{dt}$

On a donc:

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial u}{\partial t} = -\sqrt{\frac{g}{h}}\,\frac{d}{dt}\,\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{1}{2h}\sqrt{\frac{g}{h}}\,\frac{\partial H}{\partial t}\left[\left(n - \frac{h}{r}\right)\frac{ds}{dt} + \left(1 - \frac{h}{k}\right)\frac{dH}{dt}\right] + \frac{dS}{dt}$$

Le premier membre de l'équation (10) devient alors:

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial t}+\sqrt{\frac{h}{g}}\frac{d}{dt}\frac{\partial u}{\partial t}=-2\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial t}-\frac{1}{2h}\frac{\partial H}{\partial t}\left[\left(n-\frac{h}{r}\right)\frac{ds}{dt}+\left(1-\frac{h}{h}\right)\frac{dH}{dt}\right]+\frac{dS}{dt}\sqrt{\frac{h}{g}}$$

Transformation. L'équation (10) devient alors:

$$-2\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial t}=\sqrt{\frac{g}{h}}\frac{dt}{ds}\left(3-\frac{h}{h}\right)\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)^2$$

$$-\frac{\partial H}{\partial t}\left[R\left(2-\frac{h}{h}+\frac{\sqrt{gh}}{u}\right)+2S\frac{dt}{ds}-2gbu+b'u^2\sqrt{gh}-un'\right]$$

$$+\frac{\partial H}{\partial t}\frac{1}{2h}\left[\left(n-\frac{h}{r}\right)\frac{ds}{dt}+\left(1-\frac{h}{h}\right)\frac{dH}{dt}\right]$$

$$+\frac{RSh}{u}\left(1+\frac{u}{\sqrt{gh}}\right)-2bu\,S\sqrt{gh}-\frac{dS}{dt}\sqrt{gh}$$

Nous écrivons:

$$-2\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial t}=A\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)^2+B\frac{\partial H}{\partial t}+C \qquad (12)$$

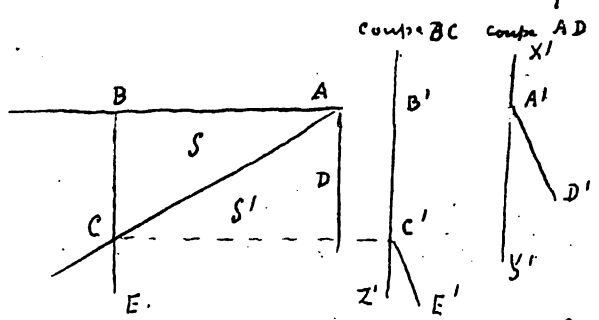
En posant:

$$A=\sqrt{\frac{g}{h}}\;\frac{3-\frac{h}{h}}{u-\sqrt{gh}} \qquad (13)$$

$$B=-R\left(2-\frac{h}{h}+\frac{\sqrt{gh}}{u}\right)-\frac{2S}{u-\sqrt{gh}}+2gbu-b'u^2\sqrt{gh}+un'+\frac{1}{2h}\left(n-\frac{h}{r}\right)\left(u-\sqrt{gh}\right)+\frac{1}{2h}\left(1-\frac{h}{h}\right)\frac{dH}{dt} \qquad (14)$$

$$C=\frac{RSh}{u}\left(1+\frac{u}{\sqrt{gh}}\right)-2bu\,S\sqrt{gh}-\frac{dS}{dt}\sqrt{gh} \qquad (15)$$

53. Perturbation du mouvement permanent. Nous supposons que le mouvement permanent soit réalisé à l'instant initial; on trouve alors une surface hydraulique prismatique S qui se prolongerait indéfiniment si aucune discontinuité



ne se présentait dans les circonstances d'amont et d'aval. Supposons que le niveau varie à partir d'un instant et soit représenté par la ligne X' A' D' composée d'une ligne horizontale X'A' suivie d'une courbe quelconque. La discontinuité dans les dérivées premières va se propager suivant la caractéristique d'aval AC et l'on obtiendra une nouvelle surface hydraulique S' coupant S suivant une courbe projeté en AC. L'équation (42) permet de calculer la variation de $\frac{\partial H}{\partial t}$ le long de AC, c'est-à-dire la variation de la tangente de l'angle D'C'Z'. Cette équation se simplifie considérablement.

Commençons par déterminer les courbes AC au moyen des équations du mouvement permanent ; portons, dans les équations $F = 0$ $F_1 = 0$:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

on trouve :

$$\frac{\partial H}{\partial s} + \frac{u}{g}\frac{\partial u}{\partial s} = i - bu^2$$

$$u\frac{\partial H}{\partial s} + h\frac{\partial u}{\partial s} = -nu$$

On en déduit :

$$\frac{\partial H}{\partial s}(gh - u^2) = gh(i - bu^2) + nu^2$$

Mais on a ici

$$dH = \frac{\partial H}{\partial s}ds + \frac{\partial H}{\partial t}dt, \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

Donc on a :

$$\frac{dH}{ds} = \frac{\partial H}{\partial s}$$

et il vient :

$$\frac{dH}{ds}(u^2 - gh) + gh(i - bu^2) + nu^2 = 0$$

Cette expression divisée par h se réduit à

$$S = 0$$

En ajoutant les deux équations de la caractéristique, on a trois équations pour déterminer les trois fonctions H, u, s. Si on porte $S=0$ dans les équations (12), (13), (14), (15), on trouve que $C=0$ et l'équation (12) prend la forme:

$$-2\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial t} = A\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)^2 + B\frac{\partial H}{\partial t} \qquad (16)$$

Ce résultat était facile à prévoir; car si le niveau d'aval restait constant, S' se confondrait avec S et l'on aurait

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

Cette valeur doit satisfaire à l'équation (12); donc il faut que C soit nul.

On a alors pour les valeurs de A et de B

$$A = \sqrt{\frac{g}{h}}\,\frac{3-\frac{h}{k}}{u-\sqrt{gh}} \qquad (13)$$

$$B = -\frac{u}{h}\left(\frac{dH}{ds}+n\right)\left(2-\frac{h}{k}+\frac{\sqrt{gh}}{u}\right) + 2gbu - b'u^2\sqrt{gh} + un' + \frac{1}{2h}\left(n-\frac{h}{\gamma}\right)(u-\sqrt{gh}) + \frac{1}{2h}\left(1-\frac{h}{k}\right)\frac{dH}{dt} \qquad (17)$$

En réunissant les termes en $\frac{dH}{ds}$ et remplaçant $\frac{dH}{dt}$ par

$$\frac{dH}{ds}(u-\sqrt{gh})$$

on a aussi:

$$B = -\frac{nu}{h}\left(2-\frac{h}{k}+\frac{\sqrt{gh}}{u}\right) + 2gbu - b'u^2\sqrt{gh} + un' + \frac{1}{2h}\left(n-\frac{h}{\gamma}\right)(u-\sqrt{gh}) - \frac{dH}{ds}\,\frac{1}{2}\left(3-\frac{h}{k}\right)\frac{u+\sqrt{gh}}{h} \qquad (18)$$

54. Lit également divergent. La surface d'une section transversale est donnée par la formule

$$\omega = \int_0^H \lambda\, dH$$

Pour H constant, λ est une certaine fonction de s. Nous sup-

poserons

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s}\,\varpi = 1$$

ϖ étant indépendant de H. Cela existerait si dans la tranche comprise entre s et $s+ds$, le lit avait la forme d'un conoïde dont l'axe aurait pour abscisse $s-\varpi$. On a alors:

$$\frac{\partial w}{\partial s} = n l = \frac{\omega}{\varpi}\,, \quad \text{d'où} \quad n = \frac{h}{\varpi}$$

On a aussi:

$$n' = \frac{1}{\varpi}\,\frac{\partial h}{\partial H} = \frac{1}{\varpi}\left(1 - \frac{h}{k}\right) = n\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{k}\right)$$

En introduisant ces valeurs dans la formule (18) on trouve:

$$B = 2gbu - b'u^2\sqrt{gh} + \left[n - \frac{dH}{ds}\,\frac{1}{2}\left(3 - \frac{h}{k}\right)\right]\frac{u+\sqrt{gh}}{h} \tag{19}$$

Si dans cette formule on remplace $\frac{dH}{ds}$ par sa valeur tirée de

$$\frac{dH}{ds}\,(u^2 - gh) + gh(i - bu^2) + nu^2$$

il vient:

$$\left.\begin{aligned} B = {} & 2gbu - b'u^2\sqrt{gh} + \frac{1}{2}\left(3 - \frac{h}{k}\right)\frac{g(i - bu^2)}{u - \sqrt{gh}} \\ & + \frac{n}{h}\,\frac{\frac{u^2}{2}\left(5 - \frac{h}{k}\right) - gh}{u - \sqrt{gh}} \end{aligned}\right\} (19)$$

55 Lit prismatique. On doit faire dans la formule précédente $n = 0$; il vient:

$$B = 2gbu - b'u^2\sqrt{gh} + \frac{1}{2}\left(3 - \frac{h}{k}\right)\frac{g(i - bu^2)}{u - \sqrt{gh}}$$

56. Perturbation du mouvement uniforme. Lorsque le mouvement est uniforme, on a:

$$i - bu^2 = 0$$

On trouve:

$$B = 2gbu - b'u^2\sqrt{gh} \tag{20}$$

Cette quantité est généralement positive, car b est

une fonction qui généralement décroît avec H et b'est négatif. Dans le mouvement uniforme u et h sont constants, les quantités A et B sont des constantes, on peut intégrer facilement l'équation (16).

Posons

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{y}$$

Il vient :

$$2\,dy = (A + By)\,dt$$

$$A + By = (A + By_0)\, e^{\frac{B(t-t_0)}{2}}$$

On voit que $A+By$ conserve son signe et croît en valeur absolue. Si $A+By_0$ est positif, y croît donc $\frac{\partial H}{\partial t}$ décroît. Si $A+By_0$ est négatif, y décroît indéfiniment et $\frac{\partial H}{\partial t}$ croît et passe par l'infini pour

$$\frac{B(t-t_1)}{2} = l\,\frac{A}{A+By_0}$$

Enfin si $A+By_0$ est nul, $\frac{\partial H}{\partial t}$ reste constant.
Pour les vitesses et les sections ordinaires A est négatif; en le remplaçant par $-A'$ on trouve que:

$\frac{\partial H}{\partial t}$ = constante pour $\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_0 = \frac{B}{A'}$

$\frac{\partial H}{\partial t}$ décroît pour $\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_0 < \frac{B}{A'}$

$\frac{\partial H}{\partial t}$ croît pour $\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_0 > \frac{B}{A'}$

Dans ce dernier cas le point où $\frac{\partial H}{\partial t}$ est infini est un point du contour apparent. Nous verrons qu'alors il se produit une onde finie reliant les surfaces S et S'.

5° Caractéristique d'amont. — On obtient la caractéris-

tique d'amont, en changeant le signe du radical dans les équations précédentes. Alors A est généralement positif, on trouve que B est aussi positif pour les vitesses ordinaires, alors $A + By$ croît, donc $\frac{\partial H}{\partial t}$ décroît dans la propagation d'une crue.

58. Sur la possibilité d'intégration. Les équations de la caractéristique ne conduisent à aucune combinaison intégrable dans le cas général. Il y a cependant un cas particulier où l'on trouve une intégrale ; c'est lorsque l'on suppose le fond du lit horizontal et que l'on néglige le frottement. Les deux équations de la caractéristique d'aval sont :

$$ds = (u - \sqrt{gh})\, dt$$

$$-dH + \sqrt{\frac{h}{g}}\, du = (i - bu^2)\sqrt{gh}\, dt + n u\, dt$$

Nous devons faire $i = 0$, $b = 0$; nous supposerons ensuite une section rectangulaire, ce qui donne $H = h$ et $n = 0$; la seconde équation devient en divisant par $\sqrt{h}$,

$$-\frac{dh}{\sqrt{h}} + \frac{du}{\sqrt{g}} = 0$$

D'où

$$u - 2\sqrt{gh} = \text{Constante}$$

On trouve de même pour l'autre caractéristique

$$u + 2\sqrt{gh} = \text{Constante}$$

Voyons s'il existe une autre intégrale de la forme

$$V(u, h, s, t) = \text{Constante}$$

La différentielle de V devrait s'annuler à cause des

des deux équations de la caractéristique ; on aurait donc

$$\left[\frac{\partial V}{\partial s}(u-\sqrt{gh})+\frac{\partial V}{\partial t}\right]dt+\left[\frac{\partial V}{\partial u}+\sqrt{\frac{h}{g}}\frac{\partial V}{\partial h}\right]du=0$$

On peut se donner le long de la caractéristique $u=\varphi(t)$ arbitrairement ; on doit donc avoir

$$\frac{\partial V}{\partial s}(u-\sqrt{gh})+\frac{\partial V}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial V}{\partial u}+\sqrt{\frac{h}{g}}\frac{\partial V}{\partial h}=0$$

On a deux équations linéaires à une seule fonction inconnue. On sait qu'on trouve immédiatement une troisième équation, en différentiant l'une d'elles suivant la caractéristique de l'autre. On trouve

$$\frac{\partial V}{\partial s}=0$$

La première devient :

$$\frac{\partial V}{\partial t}=0$$

La seconde est alors une équation unique déterminant V en fonction de u et de h ; on trouve :

$$V=\psi(u-2\sqrt{gh})$$

Ce qui reproduit l'intégrale déjà connue.
On a donc une intégrale pour chaque caractéristique ; on peut alors changer de variables et poser :

$$x=u+2\sqrt{gh} \qquad z=t$$

$$y=u-2\sqrt{gh} \qquad z'=s$$

Les équations des caractéristiques deviennent :

$$dx=0 \qquad dz'=\frac{3x+y}{4}dz$$

On en déduit les équations aux dérivées partielles

$$q' = \frac{3x+y}{4}\, q$$

$$p' = \frac{x+3y}{4}\, p$$

Si on prend la dérivée de la première par rapport à x et celle de la seconde par rapport à y et si on élimine s', il vient :

$$2(x-y)s + 3(q-p) = 0$$

On est donc ramené à une équation du second ordre à une seule fonction inconnue.

§4 Construction approchée des surfaces hydrauliques continues.

59 Classification. Nous considérerons d'abord les solutions où les fonctions H et u sont continues, les dérivées seules pouvant présenter des discontinuités ; en d'autres termes, nous nous occuperons d'abord des solutions où il n'y a ni ressaut d'élévation ni ressaut d'abaissement. Nous supposerons d'abord

$$u < \sqrt{gh}$$

c'est le cas le plus fréquent ; nous l'appellerons le cas des vitesses modérées ou le cas ordinaire. Nous aborderons ensuite le cas des grandes vitesses :

$$u > \sqrt{gh}.$$

Dans le cas du mouvement permanent on peut a priori tracer le lieu des points où l'on a :

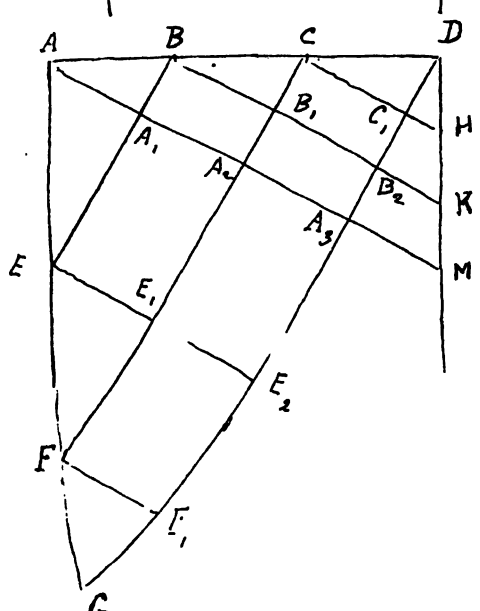
$$u = \sqrt{gh}$$

D'après l'équation du mouvement permanent, on a en ces points (numéro 53)

$$\frac{\partial H}{\partial J} = \infty$$

c'est donc le lieu des éléments verticaux des axes hydrauliques. Cette ligne ne peut être traversée que par un ressaut. Les axes situés en-dessous de cette ligne sont à grandes vitesses ; ils sont capables de se relever en ressaut. Il n'en est pas de même dans le mouvement varié ; on peut passer continûment des petites vitesses aux grandes ; une surface hydraulique continue peut être formée de deux parties appartenant à des catégories différentes. Une surface hydraulique à petites vitesses peut être formée de deux parties séparées par une onde finie.

60. Surfaces commandées par l'axe initial. Soit ABCD l'axe hydraulique initial en projection sur le plan horizontal. On donne les lignes projetées en ABCD des deux surfaces inconnues : la surface hydraulique et la surface des vitesses. Nous subdivisons ces lignes en arcs assez petits et réguliers, mais il peut y avoir aux points de jonction des discontinuités dans les dérivées. Nous appliquerons la méthode du numéro 35. L'élément BC détermine une intégrale régulière sur laquelle nous pouvons imaginer deux caractéristiques BB, et CB, ; on peut déterminer approxima-



dit le triangle BB_1C. On trace, en projection, la ligne CB_1 en la remplaçant par une droite dont l'équation est:

$$ds = -(\sqrt{gh} - u)\,dt$$

u, h s'appliquant au point C. On trace de même BB_1 par l'équation:

$$\delta s' = (u' + \sqrt{gh'})\,\delta t'$$

u', h' s'appliquant au point B.

On applique alors les deux autres équations des caractéristiques pour calculer z'' et u'' en C_1 ; on a (50):

$$dz + \sqrt{\frac{h}{g}}\,du = (mu - \sqrt{gh}\,bu^2)\,dt$$

$$\delta z' - \sqrt{\frac{h'}{g}}\,\delta u' = (mu' + \sqrt{gh'}\,bu'^2)\,\delta t'$$

En remplaçant les différentielles par les différences:

$$dz = z'' - z \qquad du = u'' - u$$

$$\delta z' = z'' - z' \qquad \delta u = u'' - u',$$

on a deux équations d'où l'on déduit les valeurs de z'' et u''. On reprend alors ce calcul, en introduisant les valeurs trouvées pour z'' et u'' et en prenant pour les coefficients des différentielles la moyenne arithmétique des coefficients calculés aux points extrêmes des arcs.

On peut aussi porter u et z sur deux axes coordonnés et on trouve le point z'', u'' à l'intersection deux droites.

On trouve de même le triangle ABA_1 ; puis on calcule le quadrangle $A_1BB_1A_2$; la surface AA_1A_2 est commandée par les courbes AC. En calculant successivement les triangles CC_1D et les quadrangles $CC_1B_2B_1$, $B_1B_2A_3A_2$ on trouvera la surface hydraulique commandée par l'arc initial ; c'est la surface AA_3D.

61. Surfaces commandées par l'amont et l'arc initial. Nous pouvons supposer que dans la section A, on règle le débit par un barrage ; le débit dans cette section est donc une fonction donnée du temps et l'on a :

$$u = f(t)$$

ce qui donne une relation entre les variables u et z. On pourrait aussi au lieu du débit, donner le niveau z en fonction du temps, ou la vitesse u, ou toute équation entre u, z. Mais on ne peut pas se donner les courbes projetées en A E F G qui appartiennent à la solution. En effet, nous nous trouvons dans le premier cas des problèmes examinés aux numéros 26 et 38. Si on se donnait A E F G, on en déduirait une surface hydraulique de la même manière que la surface $A A_3 D$ a été déduite de A B C D et ces deux surfaces hydrauliques complètement indépendantes ne se couperaient pas suivant une caractéristique. On trouverait une intersection pour les surfaces hydrauliques proprement dites et une autre intersection non associée à la première pour les surfaces des vitesses. Les deux surfaces hydrauliques ne peuvent pas former une solution du problème.

Admettons donc que dans la section A, on donne :

$$F(z, u, t) = 0$$

Considérons le triangle $A A_1 E$ limité par deux caractéristiques $A_1 A$ et $A_1 E$. Désignons respectivement par z, u ; z', u' ; z'', u'' les éléments en A, A_1, E. On trouve la droite $A_1 E$ en projection par l'équation :

$$ds' = (u' - \sqrt{g h'})\, dt'$$

On trouve alors z'' et u'' au point E au moyen de l'autre équation de la caractéristique A, E et de la relation donnée pour la section A ; on a :

$$F(z'', u'', t'') = 0$$

$$dz' + \sqrt{\frac{h'}{g}}\, du' = (mu' - \sqrt{g h'}\, b u'^2)\, dt'$$

Il est bien évident que les coefficients m et b doivent être aussi calculés en fonction de z', u', s'. Si dans ces équations, on remplace les différentielles par les différences, on trouve deux équations qui déterminent z'' et u''. Du point E, on passe en E_1, E_2. Puis on calcule E E, F et F_1. Finalement, on trouve la surface $A A_2 G$ qui dépend à la fois de l'axe initial par la caractéristique $A A_1 A_2 A_3$ et des circonstances d'amont représentées par l'équation $F = 0$.

62. Surfaces commandées par l'aval et l'axe initial. En raisonnant de la même manière, on verra qu'en DHK, on ne peut pas donner z et u, mais seulement l'une de ces fonctions ou une équation entre ces fonctions telle que

$$F_1(z, u, t) = 0$$

On détermine alors la surface hydraulique $D A_3 M$ qui dépend à la fois de l'axe initial par la caractéristique $D A_3$ et des circonstances d'aval exprimées par l'équation $F_1 = 0$. En continuant le calcul, on construirait sur $M A_3 G$ une surface dépendant de tous les circonstances initiales, d'amont et d'aval etc.

63. Cas d'un lit prismatique. En introduisant H au lieu de z, nous avons trouvé pour la caractéristique d'aval

$$-dH + \sqrt{\frac{h}{g}}\,du = (i - bu^2)\sqrt{gh}\,.\,dt$$

pour le cas où $n = 0$ (numéro 51)

En divisant par $\sqrt{gh}$, on a :

$$-\frac{dH}{\sqrt{gh}} + \frac{du}{g} = (i - bu^2)\,dt$$

Comme h est une fonction de H, on a :

$$-\frac{dH}{\sqrt{gh}} = -\,d\,\psi(H)$$

On a donc

$$d\left(\frac{u}{g} - \psi(H)\right) = (i - bu^2)\,dt$$

Si par exemple, on reprend le calcul du triangle BCB, on aura pour la seconde approximation :

$$\frac{u''}{g} - \psi(H'') = \frac{u}{g} - \psi(H) + i\,dt - \frac{bu^2 + bu'^2}{2}\,dt$$

$$\frac{u''}{g} + \psi(H'') = \frac{u'}{g} + \psi(H') + i\,dt' - \frac{bu'^2 + bu''^2}{2}\,dt'$$

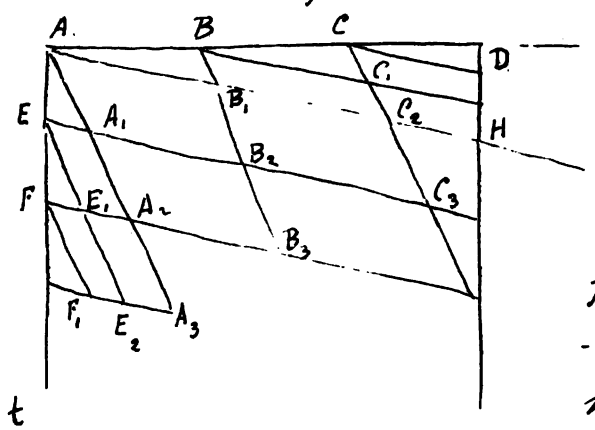
équation d'où l'on tirera u'' et H''. Il sera très-utile de représenter la fonction ψ par une courbe de telle sorte que connaissant $\psi(H'')$ on trouve immédiatement H''. On remarquera aussi que la méthode des approximations successives où l'on calcule bu^2, bu'^2, bu''^2 par une première approximation est plus rapide que le calcul direct de H'' et u''.

64. Grandes vitesses. Surface hydraulique commandée exclusivement par l'amont. Nous supposons $u > \sqrt{gh}$; alors les coefficients angulaires des deux caractéristiques sont

positifs.

$$ds = (u - \sqrt{gh})\,dt \qquad u - \sqrt{gh} > 0$$

On trouvera donc en A, une caractéristique d'amont AB, et une caractéristique d'aval AA, qui tend à remonter la rivière sans y parvenir. Nous trouvons alors dans le second cas des problèmes traités aux numéros 26 et 38.

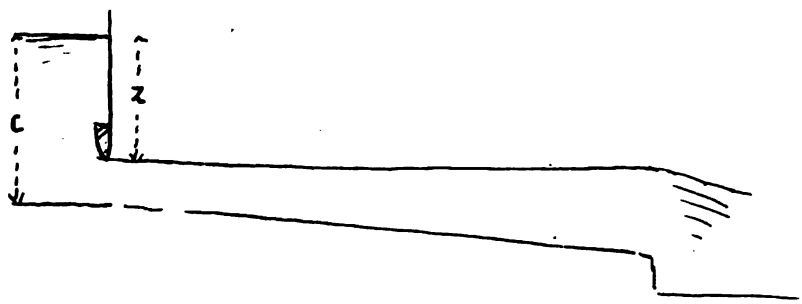


De l'axe initial AD, on déduit la surface ADH ; il n'y a plus de surface commandée par l'aval. A moins de provoquer une discontinuité, nous ne pouvons plus nous donner une condition d'aval; en DH les fonctions z et u sont déterminées par l'axe initial. Il faut donc imaginer en D un déversement qui peut tolérer ces valeurs de z et u. Si le niveau d'aval s'élevait d'après une loi donnée, on aurait une autre solution, avec une onde mobile, que nous étudierons plus loin.

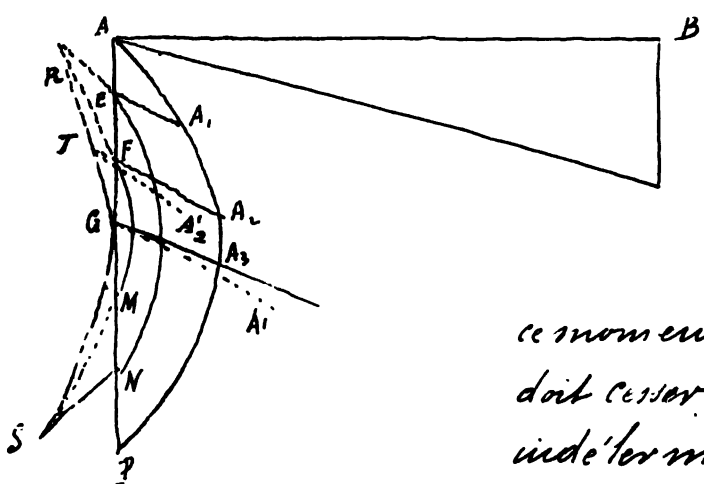
A l'amont, au contraire, nous pouvons nous donner les deux fonctions z et u ; en partant des courbes AEF, on trouvera la surface hydraulique FAA_3. Entre les deux caractéristiques AA_3 et AH, on construira une surface intermédiaire et son associée. On voit qu'au point A il y a 3 surfaces différentes qui généralement se coupent suivant les deux caractéristiques.

65 Surfaces mixtes. Donnons-nous dans la section A u et z et supposons que dans l'étendue AG, on se trouve dans le cas des grandes vitesses; on trouve la surface AA_3G. Supposons qu'à partir de G, on se trouve alors

dans le cas des vitesses modérées. Suivant GP, on ne pourra plus se donner les deux conditions d'amont ; on ne peut plus se donner qu'une relation entre u et z et l'on détermine une solution par cette relation et la caractéristique GA_3.



On peut, par exemple, installer à l'amont un barrage qu'on lève graduellement ; on aura d'abord $u > \sqrt{gh}$; puis à partir d'une certaine hauteur de la section d'écoulement ($\frac{2}{3}$ c pour une section rectangulaire) on aura $u \leq \sqrt{gh}$. A partir de ce moment, l'écoulement à fleur d'eau doit cesser ; la hauteur d'eau z doit rester indéterminée et l'on donne seulement une relation entre u et z.



On peut se demander cependant quelle serait la solution théorique que l'on obtiendrait si on se donnait les deux circonstances d'amont c'est-à-dire les fonctions u et z le long de AP. Les courbes AG commandent les surfaces AGA_3. On trouverait de même que les courbes GP commandent les surfaces $A'GP$, mais, en général, GA'' et GA_3 seront deux branches d'une même caractéristique présentant un rebroussement en G. Le point G est un point du contour apparent, car deux tangentes aux surfaces se projettent suivant GA, la tangente à la courbe initiale et la tangente à la caractéristique. Le contour apparent

-rent R G S est l'enveloppe des caractéristiques d'aval. Cette caractéristique $A_2 F$ prolongée présenterait un rebroussement T sur ce contour apparent. En d'autres termes, la surface hydraulique serait à deux nappes ; c'est une solution physiquement impossible.

Il y a bien d'autres moyens de trouver deux surfaces adjacentes appartenant à deux catégories différentes. On peut se donner arbitrairement la ligne de séparation et son associé et trouver une solution en partant de ces deux courbes arbitraires.

§ 5. Propagation d'une onde finie.

66. Deux paradoxes. Il semble que le problème de la propagation d'une onde finie devrait s'énoncer de la manière suivante : on donne à un instant deux axes hydrauliques séparés par une onde d'élévation ou d'abaissement ; que va-t-il se passer ? quelle est la vitesse avec laquelle l'onde se déplace ? Nous avons trouvé, au numéro 47, les deux équations suivantes :

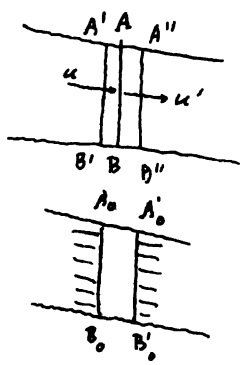
$$v = u \pm \sqrt{g h_1} \qquad h_1 = \frac{\omega'}{\omega} \frac{\Delta(\omega\eta)}{\Delta\omega} \qquad (8)$$

$$u' = u + \sqrt{g \frac{\Delta\omega\, \Delta(\omega\eta)}{\omega\, \omega'}} \qquad (9)$$

Non seulement nous avons trouvé une formule donnant la vitesse v du ressaut, mais nous avons trouvé une relation obligée entre la vitesse à l'amont et à l'aval. Si cette relation n'existe pas à l'état initial, nous tombons dans l'impossibilité. Tel est le premier paradoxe à élucider.

Ensuite nous trouvons deux valeurs pour la vitesse de l'onde. Ces deux valeurs satisfont à l'équation ; il semble qu'il n'y ait pas plus de raison de prendre l'une que l'autre ; elles ne peuvent cependant se produire à la fois. Tel est le second paradoxe à élucider.

67. Explication du premier paradoxe. Quand on dit que l'on peut prendre arbitrairement l'état initial, il y a évidemment une restriction à faire ; c'est que, si l'on ne se propose que d'étudier des phénomènes naturels, il faut que cet état initial puisse résulter d'un état antérieur. Si, par exemple, la section AB d'un cours d'eau était une section de discontinuité pour les vitesses, si la vitesse u à l'amont était plus grande que la vitesse u à l'aval, il en résulterait un choc, un coup de bélier ; l'équation de continuité donnerait $dH = \infty$; on pourrait déterminer deux sections A'B', A"B" qui viendrait coïncider après un intervalle dt ; la masse fluide A'B'B"A" devrait être projetée vers l'infini.



C'est là un phénomène tout-à-fait contraire aux phénomènes naturels. Pour reconnaître l'impossibilité de ce phénomène, il suffit de chercher l'état antérieur ; pour avoir la position de la section AB à l'instant t - dt, il faut déplacer cette section vers l'amont de udt ou de u'dt selon qu'on la considère comme faisant partie du liquide d'aval ou du liquide d'amont. Comme u' est plus petit que u, on trouve qu'il devrait y avoir un vide entre les deux masses fluides. Mais alors les pressions supposées dans les sections n'existent plus. Il faut donc supposer deux diaphragmes A_0B_0, $A'_0B'_0$ animés des vitesses u et u' et s'évanouissant au moment du choc. Ce n'est pas évidemment notre but d'étudier des phénomènes de cette espèce.

Si on supposait u plus petit que u', le vide se formerait après l'instant considéré et il faudrait imaginer une chute d'eau venant de l'infini, dans les instants précédents.
En résumé, l'état initial n'est arbitraire que dans une certaine mesure, il faut notamment que l'équation de continuité puisse être appliquées en toutes les sections sans conduire à des impossibilités.
Or ceci s'applique également au ressaut. Nous avons établi l'équation des quantités de mouvement et l'équation de continuité ; nous avons admis qu'il n'existait pas de vide et qu'il ne s'en formait pas. Il faut bien choisir un état initial qui soit conforme à cette hypothèse et c'est ce qui explique la relation entre les vitesses u et u' de part et d'autre du ressaut.
Supposons pour fixer les idées que l'onde se propage vers l'amont ; il tend à se produire au sommet de l'onde une vitesse u' donnée par la formule. Si à l'aval de l'onde, la vitesse est plus petite ou plus grande que u', il se produira un coup de bélier ou un vide.
Si on cherche l'état antérieur, on trouvera l'inverse : un vide ou une chute d'eau venant de l'infini, circonstances qui sont impossibles dans des phénomènes naturels.

68 Explication du second paradoxe. Nous avons à choisir entre les deux valeurs de v ; le signe du radical doit être déterminé. Or nous venons (de voir) que les valeurs initiales des vitesses u, u' doivent satisfaire à une équation qui contient ce radical ; ce radical doit donc avoir le signe de u'-u et par conséquent toute ambiguité disparaît.

Mais nous allons pousser plus loin nos investigations; nous allons démontrer que dans les phénomènes naturels, la vitesse relative de l'onde par rapport au courant est toujours dirigée du sommet de l'onde vers la base, pour les sections ordinaires des canaux, c'est-à-dire que pour le ressaut d'élévation, on a toujours

$$v = u - \sqrt{gh}, \qquad u' = u - \sqrt{g\frac{\Delta\omega\,\Delta(\omega\eta)}{\omega\omega'}} \tag{1}$$

et que pour le ressaut d'abaissement, on a toujours

$$v = u + \sqrt{gh}, \qquad u' = u + \sqrt{g\frac{\Delta\omega.\,\Delta(\omega\eta)}{\omega\omega'}} \tag{2}$$

ω, u s'appliquent à la plus petite section.

69. Théorèmes préliminaires. Théorème I. A la base du ressaut, la vitesse relative de l'onde finie par rapport au courant est supérieure à la vitesse relative de l'onde infiniment petite. Au sommet du ressaut au contraire, c'est l'onde infiniment petite qui a la plus grande vitesse relative

L'équation 8 du numéro 47, rappelée au numéro 66, peut s'écrire:

$$(v-u)^2 = g\frac{\omega'\,\Delta(\omega\eta)}{\omega.\,\Delta\omega}$$

Posons d'après l'équation (7) du numéro 47:

$$\omega(v-u) = \omega'(v-u') = q, \tag{7}$$

L'équation qui donne la vitesse relative de l'onde devient:

$$q^2\,\frac{\Delta\omega}{\omega\omega'} = \Delta(\omega\eta)$$

Or on trouve facilement:

$$\Delta(\omega\eta) = \int_H^{H'} \omega\,dH = \int_\omega^{\omega'} h\,d\omega$$

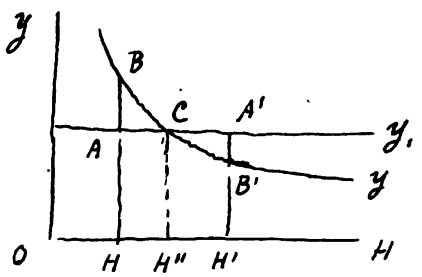
$$\Delta\omega = \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} = \int_H^{H'} \frac{l\,dH}{\omega^2}$$

L'équation de la vitesse de l'onde devient:

$$\int_H^{H'} \left(\frac{l}{\omega_3} - \frac{g}{q_1^2} \right) \omega\, dH \qquad (3)$$

Portons H en abscisse et construisons les lignes:

$$y = \frac{l}{\omega_3} \qquad y_1 = \frac{g}{q_1^2}$$



La fonction y décroît de ∞ à zéro; car on a:

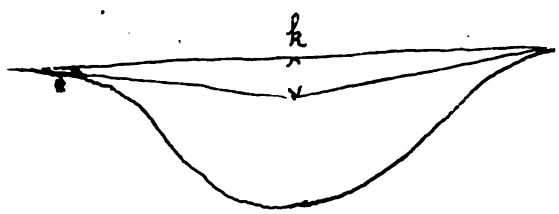
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dH} = \frac{1}{l}\frac{dl}{dH} - \frac{3}{\omega}\frac{d\omega}{dH}$$

ou bien

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dH} = -\frac{1}{h}\left(3 - \frac{h}{k}\right)$$

Nous ne considérerons ici que les sections ordinaires pour lesquelles, on a

$$\frac{h}{k} < 3$$



Si dans une section de la forme ci-contre, on avait constamment

$$k < \frac{h}{3}, \qquad 3 - \frac{h}{k} < 0$$

entre les profondeurs H et H', les conclusions qui vont suivre seraient renversées; mais c'est là un cas tout-à-fait exceptionnel.

Soient: BB' et AA' les lignes y et y_1; d'après l'équation (3), la parenthèse, qui est $y - y_1$, doit changer de signe; or c'est une fonction constamment décroissante; donc elle passe du positif au négatif et ne devient nulle que pour une seule valeur H'' de H. En considérant ω comme le poids spécifique des eaux, on a, d'après l'équation (3):

poids BCA = poids $CA'B'$ (4)

C'est cette condition qui détermine y_1 ou q_1
L'on a donc pour la hauteur H, en remplaçant q_1 par $\omega(v-u)$:

$$\frac{l}{\omega^3} > \frac{g}{q_1^2} \quad \text{ou bien} \quad (v-u)^2 > gh$$

On a de même pour la hauteur H', en remplaçant q_1 par $\omega'(v-u')$:

$$\frac{l'}{\omega'^3} < \frac{g}{q_1^2} \quad \text{ou} \quad (v-u')^2 < gh'$$

Ces inégalités démontrent le théorème, car $v-u$, $v-u'$ sont les vitesses relatives de l'onde finie, $\sqrt{gh}$ $\sqrt{gh'}$ sont les vitesses relatives des ondes infiniment petites
Il est évident que, dans l'énoncé du théorème, il s'agit des valeurs absolues de $v-u$, $v-u'$.
Les inégalités précédentes peuvent aussi s'écrire :

$$|v-u| > \sqrt{gh} \qquad |v-u'| < \sqrt{gh'}$$

ou en remplaçant $v-u$, $v-u'$ par leurs valeurs tirées des équations (8) et (10) du numéro 47 :

$$h_1 > h \qquad h_2 < h'$$

Théorème II. Il existe un profondeur intermédiaire par laquelle on a :

$$v = u'' \pm \sqrt{gh''} \quad \text{pour} \quad \omega''(v-u'') = q_1$$

En effet au point C, on a :

$$\frac{l''}{\omega''^3} = \frac{g}{q_1^2} \quad \text{d'où} \quad (v-u'')^2 = gh''.$$

Théorème III. Si H reste constant, la valeur absolue de la vitesse relative v-u varie dans le même sens que H'. Si H' reste constant, la valeur absolue de la vitesse relative v-u' varie dans le même sens que H.

Si H reste constant et si H' augmente, il faut abaisser la ligne y_1 pour satisfaire à l'équation (4) ; donc q_1^2 augmente et comme ω est constant, $(v-u)^2$ ou $|v-u|$ doit augmenter.

Si H' reste constant et si H augmente, il faut encore abaisser y_1 pour satisfaire à la condition (4) ; donc q_1^2 augmente. Or ω' reste constant, donc $(v-u')^2$ ou $|v-u'|$ doit augmenter.

Théorème IV. Si q_1^2 reste constant, les hauteurs H et H' varient en sens contraire.

En effet BB' et AA' sont alors des courbes fixes ; donc si H augmente, H' doit diminuer pour que la condition (4) continue à être satisfaite.

Corollaires. En appliquant ces théorèmes au ressaut immobile, nous retrouverons des théorèmes connus relatifs au ressaut permanent. Il suffit de faire v égale à zéro ; l'équation (7) devient :

$$\omega u = \omega' u' = q = -q_1$$

Donc q_1^2 devient q^2 ou le carré du débit.

1 D'après les théorèmes I et II, on a dans le cas du ressaut fixe :

$$u^2 > gh \qquad u'^2 < gh' \qquad u''^2 = gh''$$

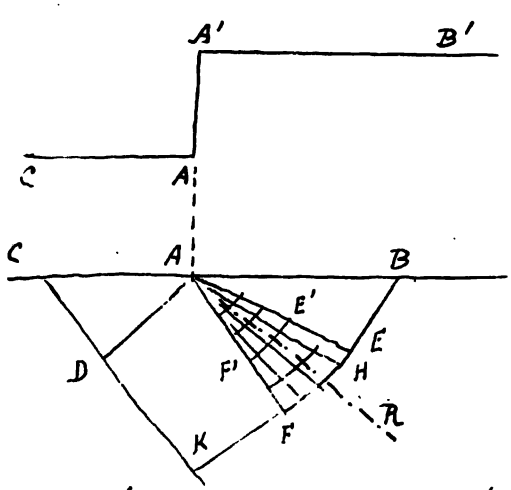
Donc à la base du ressaut, on a le cas des grandes vitesses ;

au sommet du ressaut, on se trouve dans le cas des vitesses modérées ; à une hauteur intermédiaire passe la ligne des éléments verticaux des axes hydrauliques du mouvement permanent.

2. Dans le ressaut fixe, la vitesse relative est dirigée vers l'amont au sommet comme à la base. On déduit facilement (du théorème III) que le ressaut se meut vers l'amont, quand on augmente H ou H'.

3. D'après le théorème III, si le ressaut reste fixe pour un débit constant, H et H' doivent varier en sens contraire. On sait que de ce théorème, on déduit une propriété de la courbe des ressauts, dans le cas d'un lit prismatique.

70. Ressaut évanouissant ou Onde éphémère. Nous prendrons d'abord le cas d'un ressaut d'élévation et dans les formules (8) et (9) du numéro 47, rappelés au numéro 66, nous choisirons le signe supérieur du radical.



Soient : CAA'B' l'axe hydraulique initial en élévation, CAB cet axe en plan. Nous pouvons déterminer par les caractéristiques, les triangles ABE et CAD commandés par les arcs CA et AB. Par le point A nous pouvons mener deux caractéristiques d'amont ; l'une AE relative à la surface hydraulique supérieure, l'autre AF relative à la surface hydraulique inférieure.

Les équations de ces deux caractéristiques sont :

$$ds = (u' + \sqrt{g h'})\, dt$$

$$ds = (u + \sqrt{g h})\, dt$$

Nous pouvons ensuite représenter la marche de l'onde finie par la droite AR et l'équation :

$$ds = (u + \sqrt{g h_1})\, dt$$

Les vitesses relatives de ces trois ondes sont dirigées vers l'aval et d'après le théorème I du numéro précédent, les droites AE, AF, AR qui représentent la marche des trois ondes, ont bien la disposition de la figure : c'est l'onde infiniment petite au sommet de l'onde finie qui marche le plus vite, puis vient l'onde finie, puis l'onde infiniment petite à la base du ressaut. Nous allons montrer que le ressaut va s'étaler ; que sa base aura une marche représentée par la ligne AF, sa tête, une marche représentée par la ligne AE ; de telle sorte que le ressaut est un ressaut s'évanouissant, faisant place à un axe hydraulique ordinaire dont l'inclinaison sur l'horizon d'abord verticale, va en diminuant de plus en plus.

Nous pouvons d'abord démontrer qu'il en est ainsi en divisant la hauteur AA' du ressaut en parties infiniment petites ; chaque partie constitue une onde. L'onde la plus élevée va se mouvoir avec la vitesse $u' + \sqrt{g h'}$; sa marche est donc bien représentée par AE ; l'onde la moins élevée aura, au contraire, une marche représentée par AF et les ondes intermédiaires auront des vitesses intermédiaires.

Nous arrivons ainsi aux mêmes conséquences en

construisant la surface hydraulique entre les caractéristiques AE et AF. En A l'axe hydraulique initial présente une ligne verticale AA' et il en est de même de la ligne des vitesses. Les caractéristiques d'amont varient de AF à AE. Ces caractéristiques sont coupées par les caractéristiques de l'autre système dont l'une sera EF. Les caractéristiques qui émergent de la droite AA' (ou en projection du point A) ont pour équation

$$ds = (u'' + \sqrt{g h''})\, dt$$

mais il faut faire varier u'' et h'' entre les limites u, h et u', h' d'après une certaine loi. Pour obtenir cette loi, nous considérerons AA' comme la limite de la caractéristique EF, E'F', pour E, E' convergeant vers A. Nous écrirons donc :

$$-dH + \sqrt{\frac{h}{g}}\, du = 0$$

en faisant dt = 0 dans l'équation de la caractéristique écrite au numéro 51. Nous prendrons donc pour la vitesse u'' à une hauteur H''

$$du'' = \sqrt{\frac{g}{h''}}\, dH'' \quad , \quad u'' = u + \int_H^{H''} \sqrt{\frac{g}{h''}}\, dH''$$

Nous avons précédemment divisé la verticale AA' en ondes infiniment petites ; il est facile de vérifier que cette division conduit précisément à la relation entre u'' et H'' que nous venons d'établir. A une hauteur H'', nous aurons une onde de hauteur dH''. Or la relation entre les deux vitesses à la base et au sommet

d'une onde infiniment petite est (48 et 49)

$$u' = u + \varepsilon \sqrt{\frac{g}{h}}$$

Nous ferons ici $u' - u = du''$, $\varepsilon = dH''$, $h = h''$, on a donc

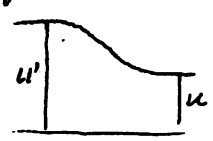
$$du'' = \sqrt{\frac{g}{h''}}\, dH''$$

ce qui est précisément la formule écrite plus haut. Connaissant la relation entre u'' et H'', nous pouvons construire, par la méthode ordinaire, le triangle AEH et les suivants ; ainsi on déterminera le point H en suivant les caractéristiques AH et EH et ainsi de suite. On calculera ensuite le quadrangle ADKF et le problème sera résolu.

Après avoir constaté qu'il s'agit d'une onde sphérique qui s'étale à partir de l'instant initial, nous devons nous demander si cet état initial correspond bien à un état antérieur possible dans les phénomènes naturels. Or en faisant décroître le temps et en prolongeant les caractéristiques EA et FA, nous trouvons une surface en surplomb sur la surface inférieure ; cette solution est physiquement impossible. On ne peut lui substituer une onde finie, car elle serait déjà disparue à l'instant initial considéré. Il faudrait donc encore imaginer un diaphragme qui maintiendrait artificiellement une différence de niveau, diaphragme qui s'évanouirait à l'instant initial. Nous pouvons donc dire que la formule $v = u + \sqrt{g h_1}$, pour un ressaut d'élévation ne peut pas s'appliquer à un phénomène naturel.

ce que nous venons de dire du ressaut d'épaisseur d'élévation, nous pouvons l'appliquer au ressaut d'épaisseur d'abaissement. On pourrait recommencer la même discussion ; mais on peut aussi supposer que dans la figure précédente l'aval soit à gauche, l'amont à droite. Le ressaut devient un ressaut d'abaissement. Les vitesses sont alors estimées de l'aval vers l'amont ; nous retrouvons aux conventions ordinaires en changeant le signe de toutes les vitesses dans les formules précédentes ce qui revient à changer le signe du radical. Le ressaut d'épaisseur d'abaissement est donc déterminé par la formule :

$$v = u - \sqrt{gh}.$$



On pourrait traiter directement la question et démontrer comme précédemment que cette formule ne correspond pas à un phénomène naturel.

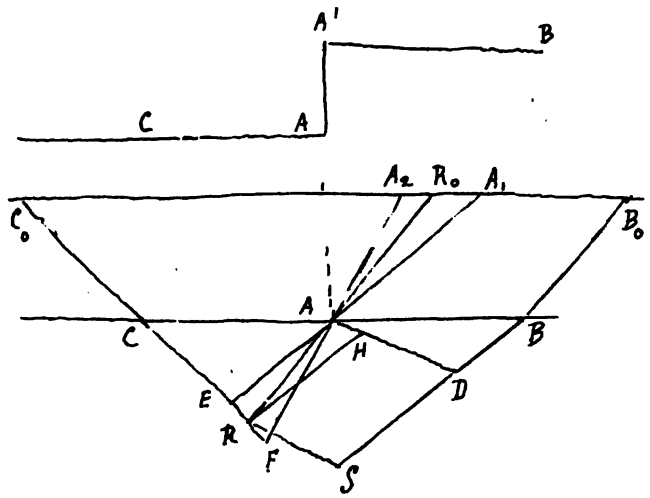
71. Ressaut persistant. En procédant par exclusion, il résulte de la discussion précédente que les seules formules qui donnent la vitesse d'une onde finie sont les équations (1) et (2) du numéro 68. Il reste à vérifier que dans ce cas le ressaut est réellement persistant et qu'il peut résulter d'un état initial antérieur. Nous ne considérerons que le cas du ressaut d'élévation. Nous arriverons au ressaut d'abaissement en appliquant le raisonnement du retournement de la figure ou en traitant directement la question par la même méthode. Soient : $CAA'B'$ l'axe initial en élévation, CAB cet axe en plan. Nous pouvons construire les triangles

ADB et CAF limités par les arcs caractéristiques et les arcs AB et AC. Par le point A nous pouvons mener deux caractéristiques d'avant, l'une AE relative à la surface hydraulique supérieure, et dont l'équation différentielle est

$$ds = (u - \sqrt{gh})\,dt,$$

l'autre AF relative à la surface hydraulique inférieure et dont l'équation différentielle est

$$ds = (u - \sqrt{g}\,h)\,dt$$



Les vitesses relatives des trois ondes sont dirigées vers l'amont et d'après le théorème I du numéro 69, les droites AE, AF, AR ont bien la disposition de la figure.

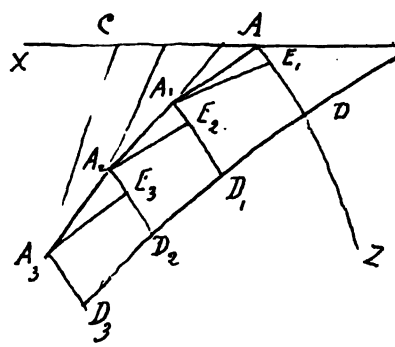
Si nous décomposons la hauteur AA' en ondes infiniment petites, nous voyons qu'au sommet l'onde infiniment petite tend à dépasser toutes les autres, sa marche étant représentée par AE; tandis qu'au pied du ressaut, l'onde infiniment petite reste en arrière, sa marche étant représentée par AF. La verticale AA' tend à se transformer en ligne en surplomb, mais comme cela n'est pas possible, il y a déversement des ondes supérieures et le phénomène de l'onde finie persiste.

On pourrait aussi construire une surface hydraulique continue FAE, comme au numéro précédent; mais cette surface serait en surplomb au-dessus de la surface FAC; c'est une solution physiquement impossible qui doit être remplacée par l'onde finie.

Si on cherche l'état antérieur, on trouve que CAB est

commandée par $C_0 A_0 A_1 B_0$; il y a une certaine indétermination. Pour la surface $A_2 A A_1$, on peut prendre indifféremment l'onde finie $A_0 A$ ou une surface continue $A_2 A A_1$ engendrée par les caractéristiques d'amont qui passent par A. Dans ce dernier cas, on a un segment d'axe hydraulique qui se redresse jusqu'à la direction verticale ; c'est une onde finie en voie de formation instantanée. (x)

72 Marche du ressaut. Nous pouvons tout d'abord construire la surface hydraulique commandée par l'axe initial inférieur AX, ainsi que la surface hydraulique commandée par l'axe initial supérieur AY. Nous savons déjà que l'onde finie envahit une partie de la première surface, de sorte que nous connaissons u et z à la base de l'onde finie. Il s'agit de montrer comment on peut déterminer la surface hydraulique ZAA_3 limitée par la caractéristique AZ et la ligne AA_3 qui représente la marche de l'onde. Nous traçons d'abord AA_1, en remplaçant la ligne AA_3 par sa tangente en A et en appliquant l'équa-



(x) Une anomalie se présente toutefois. Dans le ressaut on admet une variation brusque de vitesse, d'où perte de pente. Dans le segment incliné, il y a continuité des vitesses, cette perte de pente est nulle. La vérité est intermédiaire. On devrait corriger la formule du ressaut en admettant la continuité de u à u'' (à trouver par l'expérience) et le choc de u'' à u'. Dans le segment incliné, introduire une perte de pente supplémentaire.

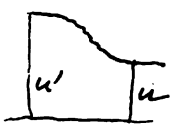
-tion :

$$ds = (u - \sqrt{g h_1})\, dt$$

Cirons la caractéristique $A_1 E_1$; nous calculerons u', z' en A_1 en écrivant l'équation de la caractéristique $E_1 A_1$ et la relation (9) entre les vitesses u, u' à la base et au sommet du ressaut ; dans cette dernière équation u, z ou H sont connus ; nous aurons donc deux équations pour trouver u' et z' (ou H'). On perfectionne ensuite le tracé par la méthode des moyennes. On construit alors le quadrangle $E_1 D D_1 A_1$. Puis on calcule le triangle $A_1 E_2 A_2$ comme nous avons calculé le triangle $A A_1 E_1$ et le quadrangle $D_1 E_2 A_2 D_2$ peut être construit. On continue de la même manière.

On remarquera qu'en chaque point de la courbe $A A_3$ aboutissent deux caractéristiques d'aval ; l'une de la surface supérieure, l'autre de la surface inférieure. S'il existait des ondes très petites sur les axes hydrauliques supérieur et inférieur, la marche de ces ondes serait indiquée approximativement par ces caractéristiques et l'on voit que ces ondes se réuniraient à l'onde finie pour en augmenter l'importance. Remarquons aussi que le mouvement de l'onde finie dépend dans une certaine mesure des fonctions arbitraires qui déterminent les surfaces hydrauliques. Mais l'étendue de l'arc AB dont la courbe $A A_3$ dépend est d'autant plus petite que la hauteur de l'onde finie est faible. Pour une onde infiniment petite la courbe $A A_3$ serait une caractéristique qui ne dépendrait que de la surface hydraulique inférieure.

73. Onde uniforme. Il existe une solution particulière très-simple du mouvement de l'onde, dans le cas d'un lit prismatique ; c'est l'onde qui relie deux mouvements uniformes. Considérons une onde d'abaissement ; on a :



$$u' = u + \sqrt{g \frac{\Delta\omega\, \Delta(\omega\eta)}{\omega\omega'}}$$

Prenons comme formule du mouvement uniforme :

$$i = \frac{au^2}{R}, \quad i' = \frac{a'u'^2}{R'}$$

En éliminant u et u' entre ces trois équations, on a :

$$\sqrt{i}\left(\sqrt{\frac{R'}{a'}} - \sqrt{\frac{R}{a}}\right) = \sqrt{g \frac{\Delta\omega\, \Delta(\omega\eta)}{\omega\omega'}}$$

C'est l'équation de l'onde uniforme ; nous lui donnons ce nom parce qu'elle se meut avec une vitesse constante et conserve la même hauteur. On peut se donner les deux profondeurs (les deux vitesses, ou les deux débits !) et calculer la pente. Si on se donne la pente, on trouve une relation entre les profondeurs. Si on prenait un ressaut d'élévation, on devrait changer le signe du radical de la relation entre les vitesses ; on trouverait une pente négative ; on retomberait donc sur le ressaut d'abaissement mais avec changement du sens du mouvement. Il n'y a donc que l'onde d'abaissement qui peut devenir uniforme. Supposons un lit rectangulaire très-large et pour simplifier prenons $a = a'$, $R = h$, $R' = h'$. L'équation de l'onde uniforme devient :

$$\sqrt{\frac{i}{a}}\,(\sqrt{h'} - \sqrt{h}) = \sqrt{g \frac{(h'-h)(h'^2-h^2)}{2hh'}}$$

D'où :

$$\frac{2i}{ga} = (\sqrt{h'} + \sqrt{h})^2 \frac{h+h'}{hh'}$$

Posons :

$$\sqrt{h'} = x\sqrt{h}$$

On trouve :

$$\frac{2i}{ga} = \frac{(1+x)^2(1+x^2)}{x^2}$$

On obtient le minimum de pente pour $x = 1$; on trouve :

$$i = 4ga$$

C'est une pente considérable. Cette solution particulière ne pourrait se produire dans la propagation d'une crue que s'il s'agissait d'une rivière torrentielle.

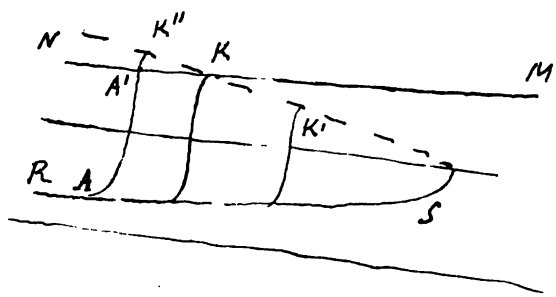
§ 6. Mouvement permanent et Problèmes analogues.

74. Méthode générale. Le problème du mouvement permanent dans les cours d'eau prismatiques a été résolu par Boudin dans toute sa généralité (Annales des Trav. pub. de Belgique, tome XX, 1863). La méthode de Boudin repose sur les propositions suivantes : si les conditions d'amont et d'aval ne changent pas, le mouvement permanent finit toujours par se produire ; lorsque plusieurs solutions sont possibles, la plus stable est celle qui admet le centre de gravité le plus bas, c'est elle qui se produit. Ces propositions ne sont pas démontrées. On démontre en Mécanique que la position d'équilibre stable d'un système pesant est la position pour laquelle le centre de gravité est le plus bas possible, mais on cherche en vain dans le mouvement permanent d'un

liquide quel est le système matériel qui est en équilibre.
Ajoutons que beaucoup de solutions considérées par Boudin comme possibles, ne le sont plus quand on pousse plus loin l'examen de la question...
Il nous semble que la véritable méthode pour reconnaître l'exactitude d'une solution du mouvement permanent, c'est d'y appliquer les équations du mouvement varié (dans le temps) afin d'y constater la permanence. Il peut être utile de vérifier la stabilité de la solution en modifiant infiniment peu les conditions initiales.
Les défauts de la théorie de Boudin ont déjà été signalés par Bresse (hydraulique, 1868, pages 310 à 312).
"Le problème ainsi posé" dit Bresse, "conduit à examiner un assez grand nombre de cas particuliers dont la discussion, très-difficile, a été présentée par M. Boudin avec beaucoup de talent et de sagacité; mais malgré les progrès incontestables qu'il a réalisés, nous ne croyons pas qu'il ait réussi à dissiper tous les nuages. .... Il est résulté de là que M. Boudin a dû souvent conclure de la possibilité d'un mode d'écoulement à la réalité; une certaine inquiétude peut subsister dans l'esprit de son lecteur..."
Bresse a aussi pressenti que c'est par l'étude du mouvement varié que l'on peut espérer de résoudre ces difficultés. "Cela vient peut-être" dit-il, "de ce qu'on a guère étudié les mouvements non permanents, ni la variation continue avec le temps, qui peut faire passer un liquide soit de l'état d'équilibre à un état de mouvement permanent, soit d'un mouvement perma-

-nent à un autre. Tout le monde admet aujourd'hui qu'on ne saurait guère aborder les questions que soulève l'étude un peu approfondie des machines, avec la seule connaissance de la Statique et qu'il faut y joindre celle des lois du mouvement. Il en est un peu de même ici, car le mouvement permanent a quelque ressemblance avec l'équilibre, et la théorie est comme une espèce de Statique."

75. Position du ressaut. Après avoir reconnu l'existence d'un axe d'amont RS et d'un axe d'aval NM, on trace la courbe SK des hauteurs du ressaut. Le ressaut se produit au point d'intersection K de cette courbe et de l'axe d'aval.



Bouslinesq démontrait cette règle de la manière suivante : 1° le ressaut ne peut se produire plus bas en K', car sa hauteur serait insuffisante, 2° il peut se produire plus haut en K'', les eaux retombant au niveau de l'axe d'aval. 3° de toutes les solutions possibles, c'est celle qui admet le centre de gravité le plus bas qui se produira. On peut faire à cette démonstration les objections suivantes. S'il s'agit d'un ressaut varié, il est possible en amont et en aval du point K. S'il s'agit d'un ressaut permanent, il est tout aussi impossible en amont qu'en aval. En effet, si les eaux retombent au niveau de l'axe d'aval, on peut toujours prendre une section d'aval au point où la chute est effectuée et retrouver l'équation du ressaut permanent, équation qui ne sera pas satisfaite.

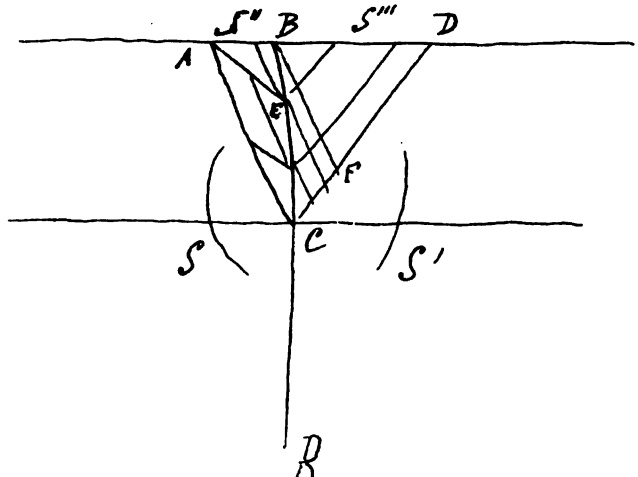
Démonstration par le mouvement varié. Si on suppose le ressaut en K, la vitesse est nulle ; la permanence des axes s'établit par les surfaces hydrauliques. Supposons que le ressaut se produise en AA' et prenons, comme axe initial, les axes permanents RA et A'M. Nous devons appliquer les formules :

$$v = u - \sqrt{gh_1} \quad , \quad u' = u - \sqrt{g\,\frac{\Delta\omega\,\Delta(\omega_1)}{\omega\,\omega'}}$$

Si nous appliquons la première formule à l'onde AK'', nous trouverions $v = 0$; mais nous devons diminuer H', donc en vertu du théorème III du numéro 69, la valeur absolue de $v-u$ ou $\sqrt{gh_1}$ va diminuer ; on trouvera donc une valeur positive de v, ce qui prouve que l'onde se rapproche du point K. Il faut remarquer que pour satisfaire à la seconde des équations précédentes, il faut modifier faiblement les vitesses initiales le long d'une certaine étendue de l'axe d'aval (ou d'amont) ; ces modifications sont très-petites, car elles seraient nulles si le ressaut était en K. Cela exclut l'hypothèse du ressaut évanouissant, car alors il faudrait changer le signe du radical dans les deux équations et les vitesses devraient subir de grandes modifications, ce qui est contraire à l'hypothèse des petites modifications dans les conditions initiales.

On démontre de la même manière que si le ressaut est placé en aval du point K, il remonte vers le point K. On pourrait demander d'étudier les lois du mouvement du ressaut dans les environs de sa position d'équilibre ; cela n'est pas possible, par la raison bien simple qu'il n'y a pas de loi. Il faut, en effet,

supposer que le mouvement permanent soit troublé sur un certaine étendue ; cette perturbation dépend de deux fonctions arbitraires. La marche et la hauteur du ressaut dépendent aussi de deux fonctions inconnues ; il semble donc que l'on pourrait se donner arbitrairement ces deux dernières fonctions pour en déduire les deux autres. Nous allons démontrer qu'il en est ainsi.



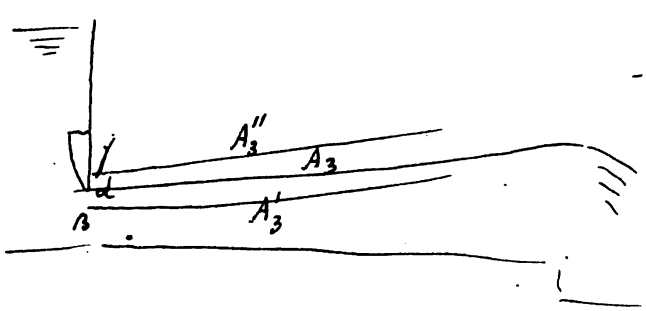
Notre but est d'obtenir, comme solution finale, la position d'équilibre du ressaut représentée par CR et les surfaces cylindriques S, S' engendrées par les axes du mouvement permanent. Menons par C les caractéristiques d'aval CA et CD sur les surfaces S, S' prolongées en faisant décroître le temps. ; donnons la trajectoire CB du ressaut. En se donnant CB, on se donne une équation entre u et H et l'on peut construire la surface S'' qui recouvre l'espace BCA. On a de même une relation entre u' et H' et l'on pourra construire S''' pour recouvrir BCD. Il y a même indétermination pour les surfaces ABE et BFD; on peut se donner une relation entre u et H le long de ABD. On doit donc que l'on pourra déterminer l'état initial ABD qui réalise la marche BEC du ressaut choisie arbitrairement (dans une certaine mesure).

76 Du ressaut permanent d'abaissement. Si on applique l'équation des quantités de mouvement à un ressaut per-

-manent d'abaissement, on trouve la même formule que pour le ressaut d'élévation. "Il ne semble pas impossible", écrit Bresse (hydraulique, page 306) "qu'un ressaut de cette espèce existe dans un courant; toutefois nous n'avons à cet égard qu'une présomption théorique, et, avant de l'admettre comme suffisamment établie, on doit attendre qu'un observateur à venir en ait montré la réalisation matérielle."

Notre théorie permet de démontrer que ce ressaut d'abaissement est impossible pour les sections ordinaires où $3-\frac{h}{k}$ est positif. En effet la vitesse du ressaut d'abaissement est donnée par la formule $v = u + \sqrt{gh}$, et cette vitesse ne peut s'annuler. On pourrait, il est vrai, imaginer un état initial pour lequel le radical aurait le signe moins, mais ce serait un ressaut évanouissant.

II. Détermination des axes hydrauliques du mouvement permanent. Il serait oiseux d'examiner tous les cas attendu que les raisonnements sont presque toujours les mêmes. Prenons l'exemple d'un barrage tel qu'en supposant l'orifice à fleur d'eau, on ait:



$$u > \sqrt{gh}$$

Il s'agit de démontrer que le mode d'écoulement est bien celui que l'on suppose, c'est-à-dire que le bord de l'orifice d est le premier point de l'axe d'amont. Considérons des solutions infiniment peu différentes

de la solution α. Supposons une solution β, $\alpha\beta$ est un ressaut d'abaissement ; ou bien, il est évanouissant, ou bien il s'éloigne avec une vitesse $u + \sqrt{gh}$; dans les deux cas, on revient à la solution α. Supposons une solution f ; αf est un ressaut d'élévation qui s'évanouit ou s'éloigne avec une vitesse positive $u - \sqrt{gh}$. On pourrait objecter que αf recouvre le vannage, mais les pressions de la paroi, si elles existaient, accéléreraient le mouvement de l'onde.

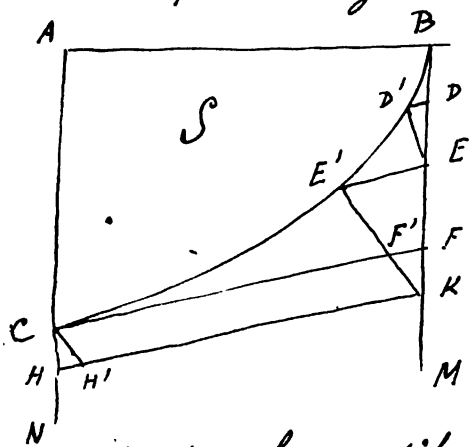
On peut supposer l'axe A_3' réalisé ; on lève le vannage de $\beta\alpha$; l'étude des vitesses apprend que $\alpha\beta$ est un ressaut d'abaissement évanouissant ; on peut d'ailleurs étudier la surface hydraulique qui représente le mouvement varié ; elle se compose des surfaces cylindriques ayant A_3 et A_3' comme directrices réunies par deux autres surfaces dont l'une est engendrée par les caractéristiques d'aval portant des points de la verticale $\beta\alpha$.

Si au contraire, on suppose A_3'' réalisé, et si on abaisse le vannage, on trouve que la surface commandée par la verticale αf est physiquement impossible et que l'onde finie doit se produire ; elle s'éloigne avec la vitesse $u - \sqrt{gh}$.

78. Problèmes analogues du mouvement varié. On peut reprendre toute la discussion des axes du mouvement permanent et faire varier continûment les conditions d'aval et d'amont ; on construira les surfaces hydrauliques et la marche du ressaut. Supposons pour fixer les idées un axe d'amont A_3 avec déversement à l'aval dans un réservoir ; les conditions d'amont

ne varient pas, mais le niveau du réservoir s'élève graduellement. Il se produit d'abord à l'aval un ressaut incomplet ; ce ressaut ne peut remonter le canal, car sa vitesse serait dirigée vers l'aval. Il arrivera un moment où la vitesse du ressaut sera dirigée vers l'amont.

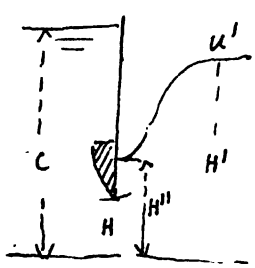
La surface hydraulique se compose d'une surface hydraulique S engendrée par l'axe d'amont, séparée, par un ressaut, de la surface CBM commandée en partie par l'aval.



Supposons qu'en B la vitesse du ressaut passe par zéro. Nous pouvons admettre comme première approximation que l'arc BD' se confond avec BD ; on trouve H' en D par la condition d'aval ; on trouve u' en D' ou D par l'une des équations du ressaut. On peut ensuite déterminer plus exactement le point D' en appliquant la méthode des moyennes à l'arc BD' et l'arc DD' de la caractéristique d'aval. On trouve le point E en suivant DE et D'E ; puis E' comme D' et ainsi de suite.

Il arrivera un moment où le ressaut noiera l'orifice par sa base. A partir de ce moment, on a entre u', H' et c une relation

$$F(c, u', H') = 0$$



mais le débit n'est plus indépendant de l'aval. On arrive à la relation précédente en éliminant H'' entre l'équation qui donne le débit et l'équation de l'onde où l'on pose v = 0

grâce à l'introduction des pressions du ramage ; le terme ωy, doit être remplacé par $\omega'' y''$ calculé pour la hauteur H'' (x) On construit alors la surface hydraulique NCFM par zônes telles que FKHC. On trouve le point K en suivant la caractéristique F'K ; puis des quadrangles successifs déterminent le point H' ; on trouve alors le point H en suivant H'H et appliquant au point H, l'équation précédente.
On pourrait aussi engendrer la surface par les caractéristiques d'amont et déterminer successivement D'E, E'K etc...

§6. Formation d'une onde finie dans un mouvement continu. Mascaret.

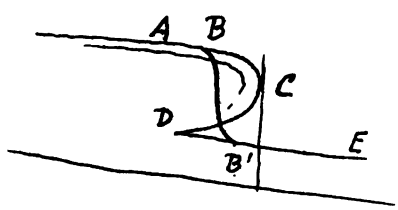
79. Dans le mouvement permanent le ressaut ne se produit que pour passer d'un axe hydraulique à grande vitesse ($u > \sqrt{gh}$) à un axe hydraulique à petite vitesse ($u' < \sqrt{gh'}$). Mais dans le mouvement varié il peut se produire un phénomène merveilleux, bien différent des phénomènes du mouvement permanent : c'est la formation d'une onde finie au sein d'une surface hydraulique continue, même

---

(x) M. Keelhof a signalé une erreur commise par Boudin qui suppose que le ressaut disparaît instantanément. L'idée même du mouvement varié rend cette hypothèse absurde, car la diminution brusque du débit occasionnerait un vide dans le canal. M. Keelhof admet l'axe d'aval de Boudin, mais démontre qu'il y a abaissement contre la vanne. (Annales des T. T. de l'E. de Gand, 1898.)

dans le cas des vitesses modérées ($u < \sqrt{gh}$). Cette onde naît en un point du fleuve, se déplace en augmentant d'importance, puis diminue et s'éteint.

Nous avons vu, au numéro 37, que les projections horizontales des caractéristiques pouvaient envelopper une courbe ; à cette courbe correspond un contour apparent sur chacune des surfaces intégrales. Si on construisant une surface hydraulique, on trouve un contour apparent séparant deux nappes ayant même projection horizontale, il est bien évident que la solution continue est alors impossible. On ne peut pas réaliser plusieurs valeurs de z ou de v au même endroit ; on ne pourrait pas réaliser un axe hydraulique de la forme A B C D E ; la solution de l'onde finie B B' s'impose.



Il y a lieu de distinguer deux cas : 1° l'onde finie d'amont, si ce sont les caractéristiques d'amont qui enveloppent une courbe en projection horizontale. 2° l'onde finie d'aval si ce sont les caractéristiques d'aval qui fournissent le contour apparent. Le mascaret est une onde finie d'aval. Nous en donnerons d'abord la description, nous résumerons la théorie admise jusqu'à ce jour ; puis nous exposerons notre théorie du contour apparent.

80. Description du Mascaret. Voici comment M. Partiot décrit le Mascaret de la Seine (A. des Ponts et chaus. 1861, tome I, page 18) " Lorsqu'on examine l'arrivée du flot, un jour de syzygie, du sommet de l'un des promontoires élevés qui dominent l'embou-

- chure de la Seine, on voit qu'un simple changement dans le sens des courants indique que la mer monte au milieu des passes profondes qui existent entre les bancs. Sur le bord de ces passes, on aperçoit comme un gonflement subit ou une vague dont une extrémité parcourt en déferlant la rive, et qui se prolonge, mais sans se briser, vers le milieu de la passe. On peut même remarquer, à la forme de la limite des eaux sur le banc, qu'une élévation de niveau suit immédiatement son passage. Cette vague n'est autre chose que le mascaret."

La hauteur du Mascaret a quelquefois atteint plus de 3m en aval de Caudebec.

81. Explication de Bremontier, Babinet, Bazin. Nous emprunterons cette explication à l'hydraulique de M. Collignon (page 309)." Le phénomène, connu sous le nom de barre, de mascaret, de Bore (sur le Gange), de Pororoca (sur le fleuve des Amazones), a été expliqué pour la première fois par Bremontier; la théorie qu'il a proposée est aujourd'hui généralement admise, surtout depuis les publications de M. Babinet qui l'ont en quelque sorte rendue populaire. Mais M. Bazin l'a précisée en y appliquant des formules.

" Il prend pour exemple un fleuve de 2m de profondeur, dans lequel les eaux s'écoulent avec une vitesse de 1 mètre; la marée monte de 2m, 40 par heure, ou de 0m, 20 par chaque intervalle de cinq minutes. Supposons que cet exhaussement, au lieu de s'opérer d'une manière continue, se produit brusquement par tranche de 0, 20. La première tranche donnera lieu à une onde qui

aura pour vitesse

$$\sqrt{g(2+0,20)} - 1 = 3^m,64$$

.... le calcul montre que la vitesse du courant descendant n'est plus que de $0^m,58$. .....

Au bout de cinq minutes, le niveau s'élève de $0^m,20$; et l'onde à laquelle ce nouvel exhaussement donne naissance a pour vitesse vers l'amont

$$\sqrt{g(2,20+0,20)} - 0,58 = 4^m,27$$

.... la vitesse moyenne descend à 0,17.

Cinq minutes après, arrive une troisième onde qui aura pour vitesse

$$\sqrt{g(2,40+0,20)} - 0,17 = 4^m,88$$

et la vitesse du courant devient négative. Alors seulement l'eau de la mer refoule l'eau du fleuve. La vitesse de propagation des ondes a été comme on voit, toujours en augmentant.

La première onde aura parcouru dans les cinq premières minutes un espace de 1092^m à la vitesse de 3,64; la deuxième, qui part cinq minutes plus tard, avec une vitesse de $4^m,27$, rattrapera la première à la distance de 7400^m, au bout de 34 minutes. Alors les deux ondes forment ensemble une onde unique qui a $0^m,40$ de hauteur et qui s'avance dans le canal à la vitesse de

$$\sqrt{g(2+0,40)} - 1 = 3,85$$

Mais la troisième onde s'avance avec la vitesse de $4^m,88$; elle atteindra au bout de quelques minutes l'onde combinée, dont elle portera la hauteur à 0,60, et la vitesse à

$$\sqrt{g\,(2{,}00 + 0{,}60)} - 1 = 4^{m},05$$

Par ce calcul approximatif ....., on conçoit comment, au bout de quelque temps, la réunion des ondes élémentaires peut former une lame de dimension finie qui marche en tête du flot."

82. Objections. Si les calculs que nous venons de transcrire étaient exacts, on devrait en conclure qu'il doit se produire un mascaret dans tous les fleuves, car les ondes successives à marée montante ont toujours des vitesses croissantes. A chaque crue d'une rivière, les ondes successives devraient pour les mêmes raisons, se concentrer en une onde unique. Or on sait que le mascaret ne se produit que dans des conditions exceptionnelles, et que le ressaut d'abaissement, en temps de crue, ne se réalise presque jamais.

Pour reconnaître l'erreur qu'il y a dans ces calculs, il suffit de calculer les pentes pour les différents mouvements uniformes qui se succèdent; on trouve des pentes très-différentes et comme cette pente doit être la pente de fond, on tombe dans l'absurde. Remarquons d'ailleurs que les ondes seraient des ondes uniformes et nous avons démontré que l'onde de relèvement n'est jamais uniforme. (73). Nous reprendrons plus loin les données du calcul de M. Bazin et nous démontrerons que le mascaret est impossible avec ces données et que deux ondes infiniment petites qui se suivent, se rapprochent con-

-timellement, mais leur distance tend vers une certaine limite qui n'est pas même égale à zéro.

83. Contour apparent de la surface hydraulique. Appliquons aux équations du mouvement varié la théorie du numéro 37 relative au contour apparent des surfaces intégrales de deux équations simultanées aux dérivées partielles. Si nous nous donnons deux courbes arbitraires associées, sur les deux surfaces intégrales, on peut calculer les dérivées des fonctions x ou u par les équations (1) (2) (3) (4) du numéro 50. On trouvera par exemple

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{N}{D}$$

Nous avons obtenu les caractéristiques en exprimant l'indétermination; nous avons annulé le numérateur et le dénominateur. Nous trouverons le contour apparent en exprimant que les dérivées sont infinies; il faut, pour cela, égaler le dénominateur à zéro, les numérateurs restant quelconques. Nous retrouvons ainsi la première des équations des caractéristiques dans la seconde; on a donc

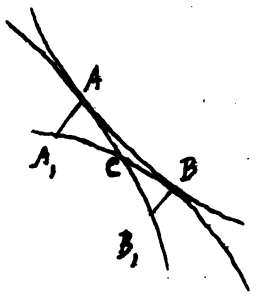
$$ds = (u \pm \sqrt{gh})\,dt.$$

Pour déterminer les deux courbes associées, nous devons encore nous donner arbitrairement deux équations. Si, par exemple, nous prenons les caractéristiques d'amont, nous poserons:

$$u = \varphi(t), \quad x = \psi(t), \quad ds = (u + \sqrt{gh})\,dt$$

Connaissant ces deux courbes associées, on peut cons-

-truire la surface hydraulique et son associé. En projection horizontale, le contour apparent est enveloppé par les caractéristiques correspondantes, car en un point A, on trouve la même valeur de $\frac{ds}{dt}$ pour le contour apparent et la caractéristique.



Quand on se donne deux courbes arbitraires sur les surfaces intégrales, on peut construire ces surfaces par triangles et quadrangles ; cette méthode est applicable ici ; mais il y a quelques particularités à signaler. Pour un même arc AB., on peut construire le triangle AA_1B ou ABB_1 ; ces triangles se trouvent sur deux nappes différentes, sinon au point C, on ne trouverait pas deux valeurs de $\frac{ds}{dt}$. Pour calculer le triangle AA_1B, on écrit les équations des caractéristiques AA_1 et BB_1 ; dans une première approximation, on peut pour AA_1 écrire

$$-dH + \sqrt{\frac{h}{g}}\,du = 0 \qquad ds = dt = 0$$

On a pour BA_1 :

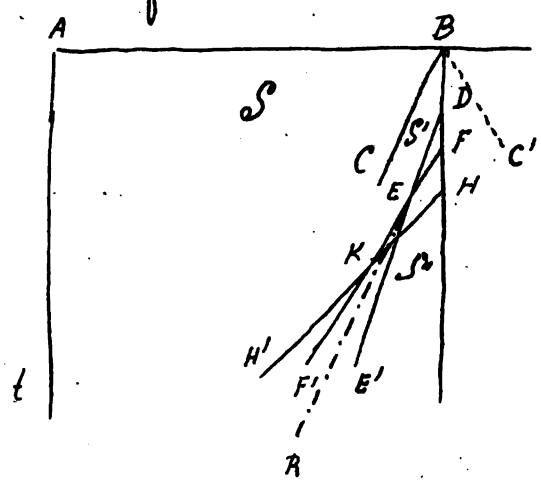
$$-\delta H' - \sqrt{\frac{h'}{g}}\,\delta u' = (i' - b'u'^2)\sqrt{gh'}\,\delta t' + n'u'\delta t'$$

On calculera H'' et u'' en A_1, puis on perfectionnera par les moyennes. On trouve la première nappe en construisant les triangles analogues à AA_1B, puis les quadrangles. On trouve la seconde nappe en prenant les triangles analogues à ABB_1, puis les quadrangles.

Puisque le contour apparent dépend de deux fonctions arbitraires, il semble qu'on peut obtenir de cette

façon toutes les intégrales. Mais il faut remarquer que le contour apparent peut devenir imaginaire, se transporter à l'infini ou en dehors de la partie utile du plan des (s,t).

84. Onde finie d'aval ou Mascaret. Connaissant l'axe hydraulique AB à marée basse, on peut déterminer la surface S commandée par l'axe initial, puis la surface S' commandée par l'aval et la caractéristique BC. Supposons qu'à un moment donné,



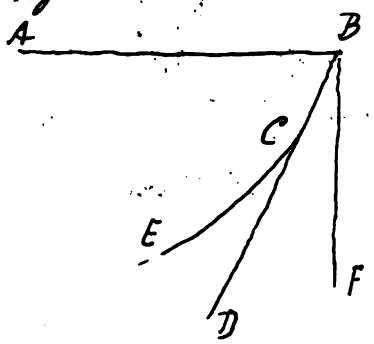
on trouve une caractéristique DE, coupée en E par la caractéristique suivante. A partir de la caractéristique DE, on doit abandonner la solution à deux nappes engendrées par les caractéristiques EE', FF', HH' et déterminer la courbe ER qui représente la marche de l'onde finie qui se produit. Nous avons indiqué précédemment comment on pouvait construire cette courbe ER et la surface S'' commandée par l'aval et la marche du ressaut. (78). On obtiendra donc la variation en hauteur et en position du mascaret, jusqu'à sa disparition.

Le point où commence le mascaret est le point E du contour apparent qui correspond au minimum de t. Comme $\frac{ds}{dt}$ ou $u - \sqrt{gh}$ n'est jamais infini, le point E doit être un point d'arrêt, ou un point de rebroussement du contour apparent.

Nous avons vu aussi que les caractéristiques pouvaient passer par un même point ; il y aurait alors formation instantanée d'une onde finie (71).

§5 Circonstances qui peuvent provoquer la formation d'un mascaret.

1. Rapidité d'élévation de la marée. Si on pouvait relever le niveau d'aval avec une rapidité assez grande, on pourrait toujours obtenir un mascaret. En effet, soit BCD une caractéristique d'aval ; donnons-nous la projection CE du contour apparent ; cela revient à donner une relation entre u et H le long de CE ; on peut alors construire la surface hydraulique, connaissant la caractéristique CD et la relation dont il vient d'être question, suivant CE ; la seconde nappe déterminera BF ou la variation du niveau d'aval. On peut aussi écrire l'équation qui donne la variation de $\frac{\partial H}{\partial t}$ le long de la caractéristique BC (52,56), déterminer la constante en exprimant que $\frac{\partial H}{\partial t}$ est infini en C et en déduire $\frac{\partial H}{\partial t}$ en B. On voit donc que s'il s'agissait d'un canal d'expérimentation débouchant dans un réservoir dont on pourrait faire varier le niveau à volonté, on pourrait toujours produire un mascaret.



2 Pente de fond. Si la pente de fond de la rivière à marée était ce qu'on appelle une forte pente dans l'étude du mouvement permanent, on pourrait avoir à marée montante un axe à grande vitesse ; il se produirait, à chaque marée, un ressaut à l'em-

- bouchure ; ce ressaut, incomplet d'abord, se déplace-rait vers l'amont pour revenir ensuite au point de dé-part. Les mascarets dont on a donné la description, ne présentent pas ce caractère et la pente de fond n'atteint pas la limite dont il a été question.

Si dans la figure précédente, on avait eu $u > \sqrt{gh}$, la caractéristique BC aurait pris la position BC' et le mas-caret eut été inévitable. Il en est de même pour un cas voisin. La caractéristique BC fait avec BM ou l'axe des t, un angle déterminé par

$$\operatorname{tang} CBM = \sqrt{gh} - u$$

Cet angle sera très petit à marée basse. Lorsque la marée montera, h augmentera, u diminuera, on trouvera donc une caractéristique HH' qui coupera les précé-dentes et alors il y a mascaret.

3. Faibles profondeurs. Bancs. On voit aussi par le raison-nement qui précède que le mascaret sera d'autant plus probable que h est petit à marée basse. La présence de bancs, dans la partie inférieure de la rivière peut diminuer la profondeur moyenne h. A marée basse de vive eau, les bancs sont à découverts ; la marée monte, les eaux recouvrent les bancs, la profondeur moyenne diminue encore. Voyons comment varie le coefficient angulaire de la caractéristique ; posons

$$v = \sqrt{gh} - u$$

On a:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{h}}\left(1 - \frac{h}{h}\right)\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}$$

Si on remplace $\frac{\partial u}{\partial t}$ par sa valeur écrite au numéro 52, on trouve

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{h}}\left(3-\frac{h}{k}\right)\frac{\partial H}{\partial t} - S$$

Si le mouvement se rapproche du mouvement permanent, on peut faire $S=0$; on a donc :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{h}}\left(3-\frac{h}{k}\right)\frac{\partial H}{\partial t}$$

Quand l'eau recouvre des bancs presque horizontaux, on a (69)

$$3-\frac{h}{k} < 0$$

Donc v décroît quand H croît. On obtiendra donc des faibles valeurs de v au moment où la marée monte déjà depuis quelque temps, c'est-à-dire quand $\frac{\partial H}{\partial t}$ aura déjà une valeur importante. Au bout de peu de temps h sera doublé, triplé etc. et cela provoquera l'intersection des caractéristiques en projection et la (formation du) mascaret.

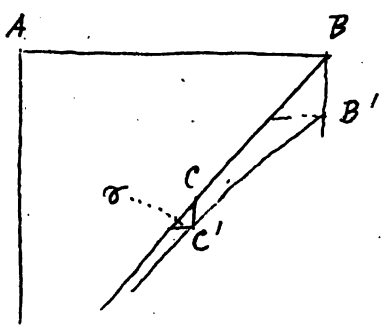
86. Rectification du calcul de M. Barin. Reprenons l'hypothèse de M. Barin, celle d'un mouvement uniforme à marée montante. Cette hypothèse est assez plausible dans le cas d'une pente de fond assez forte vers la mer. Si le niveau de marée basse se maintenait indéfiniment, on aurait le mouvement permanent et souvent un mouvement fort approché du mouvement uniforme. A marée basse le mouvement permanent n'a pas encore eu le temps de se produire ; il y a encore excès de pente superficielle et l'accélération $\frac{\partial u}{\partial t}$ est positive. Cette accélération s'annulera à un certain instant de la marée montante ; on pourra alors négliger

l'accélération sur une certaine étendue de la rivière. Quoiqu'il en soit, donnons-nous $\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_0$ au point B et calculons $\frac{\partial H}{\partial t}$ le long de la caractéristique BC, suivant laquelle se propage la perturbation du mouvement uniforme. Reprenons l'équation du numéro 56 :

$$A' = \sqrt{\frac{g}{h}}\ \frac{3-\frac{h}{R}}{\sqrt{gh}-u}$$

$$B = 2gbu - b'u^2\sqrt{gh} \quad , \quad b' = \frac{\partial b}{\partial H}$$

$$By - A' = (By_0 - A')\, e^{\frac{B(t-t_0)}{2}} \quad , \quad y = \frac{1}{\frac{\partial H}{\partial t}} \qquad (1$$



Pour qu'un point de BC soit sur le contour apparent, il faut que $\frac{\partial H}{\partial t}$ croisse jusque l'infini, ou que y tende vers zéro pour une certaine valeur de t. Il faut pour cela que l'on ait :

$$By_0 - A' < 0 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_0 > \frac{B}{A'}$$

Comme il s'agit d'un calcul très-approximatif, nous emploierons la formule de Prony :

$$b = \frac{b_1}{R} \qquad b_1 = 0{,}0004$$

Nous supposerons une section rectangulaire de grande largeur ; on a :

$$H = h, \quad h = 0 \quad , \quad R = h$$

$$\frac{B}{A'} = \frac{b_1 u}{3h}\left(u + 2\sqrt{gh}\right)\left(\sqrt{gh} - u\right)$$

Prenons comme M. Bazin $u = 1^m$, $h = 2^m$; on trouve :

$$\frac{B}{A'} = 0,002254 \,, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_0 > 0,002254$$

La marée devrait monter par heure de plus de

$$0,002254 \times 3600 = 8^m,11$$

Il n'y aura donc pas de mascaret pour une marée qui monte de $2^m,40$ par heure. Dans ce dernier cas on a :

$$By_0 - A' > 0$$

y croît indéfiniment, $\frac{\partial H}{\partial t}$ décroît indéfiniment. On trouvera le point du contour apparent en posant dans l'équation (1) :

$$y = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = \infty$$

On trouve :

$$\frac{B(t_1 - t_0)}{2} = \text{log. nép.} \frac{-A'}{By_0 - A'}$$

La valeur de t_1 est imaginaire. Il est donc à présumer que la caractéristique $B'C'$ infiniment voisine de BC ne rencontre pas même BC à l'infini ; c'est ce que nous allons démontrer.

Posons :

$$BB' = \delta t_0 \,, \quad CC' = \theta\, \delta t_0 + \dots$$

On a :

$$t' = t + \theta\, \delta t_0 + \dots \qquad \frac{dt'}{ds} = \frac{dt}{ds} + \frac{d\theta}{ds}\, \delta t_0 + \dots$$

$$\delta \frac{1}{v} = \frac{d\theta}{ds}\, \delta t_0$$

Or :

$$\delta t = \theta\, \delta t_0$$

Donc :

$$-\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

Or d'après la formule citée au numéro 95, on a :

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{A'}{2}\frac{\partial H}{\partial t}$$

Il vient donc

$$\frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{A'}{2}\frac{\partial H}{\partial t}$$

d'où

$$l\,\theta = -\frac{A'}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial H}{\partial t}\,dt$$

Or

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{y} = \frac{B}{A' + (By_0 - A')\,e^{\frac{B(t-t_0)}{2}}}$$

On trouve :

$$\theta = \frac{A'e^{-\frac{B(t-t_0)}{2}} + By_0 - A'}{By_0} \qquad (2)$$

Si l'on fait $t = \infty$, on obtient :

$$\theta_1 = \frac{By_0 - A'}{By_0} = 1 - \frac{A'}{B'}\left(\frac{\partial H}{\partial t_0}\right) \qquad (3)$$

Pour les données de M. Bazin, on trouve :

$$\theta_1 = 0{,}70$$

Il est facile de voir que les distances r_0, r, r_1, des deux ondes successives dont la marche est représentée par les caractéristiques, sont proportionnelles à δt_0 $\theta\,\delta t_0$ ... $\theta_1\,\delta t_0$; de sorte que l'on a :

$$r_1 = 0{,}70\; r_0$$

c'est-à-dire que si l'on considère deux ondes à 1^m de distance, leur distance décroît sans cesse mais a pour limite 0,70.

Nous pouvons aussi calculer comment varie

l'exhaussement δH entre les deux caractéristiques. On a:

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial t}\,\delta t = \frac{\partial H}{\partial t}\,\theta\,\delta t_0$$

$$\delta H_0 = \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_0 \delta t_0$$

$$\frac{\delta H}{\delta H_0} = \frac{\theta\,\frac{\partial H}{\partial t}}{\frac{\partial H}{\partial t_0}}$$

En remplaçant θ et $\frac{\partial H}{\partial t}$ par leurs valeurs, on trouve:

$$\delta H = \delta H_0\, e^{-B\frac{t-t_0}{2}}$$

Tous ces résultats montrent très-bien en quoi consiste l'erreur commise par M. Basin ; si on considère un exhaussement $\delta H_0 = 0^m,20$, cet exhaussement diminue en progression géométrique en se propageant vers l'amont. Les différences entre les vitesses de propagation vont donc constamment diminuer et les calculs basés sur le mouvement uniforme des ondes donnent évidemment des résultats inexacts.

87. Modification des données. D'après les considérations exposées au numéro 84, le mascaret est beaucoup plus probable quand la profondeur à marée basse diminue. Nous vérifierons ces conclusions en prenant comme nouvelles données:

$$u = 0,80 \qquad h = 0,50$$

On trouve: $\frac{B}{A'} = \frac{0,00074896}{3}$

On doit avoir: $\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_0 > \frac{0,00074896}{3}$

Cela correspond à une marée qui monte par heure de plus de

$$\frac{0,000\,74896}{3} \times 3600 = 0,898$$

La marée qui monte de $2^m,40$ par heure produirait donc certainement un mascaret.

88. Onde finie d'amont. Les caractéristiques d'amont peuvent donner lieu à un contour apparent comme les caractéristiques d'aval. On pourrait aussi se donner la surface hydraulique commandée par l'axe initial, la projection horizontale du contour apparent et déterminer le niveau d'amont. En d'autres termes, si l'on pouvait augmenter suffisamment la rapidité d'une crue, il se formerait toujours une onde finie marchant en tête des eaux de crue. Cependant on n'observe pas ce phénomène. La raison en est que le calcul indique que le niveau d'amont devrait s'élever avec une rapidité si grande, qu'on ne se trouve jamais dans ces conditions.

Supposons par exemple un mouvement uniforme et prenons:

$$u = 1^m \quad , \quad h = 2^m$$

On peut calculer $\frac{\partial H}{\partial t}$ le long d'une caractéristique d'amont; la condition de la formation de l'onde finie est encore

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_0 > \frac{B}{A'}$$

On doit dans les valeurs de B et de A' changer le signe du radical; on trouve:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_0 > 0,0028.$$

Cela correspond à un exhaussement de $10^m,08$ par heure.

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications.

Note sur les intégraphes.

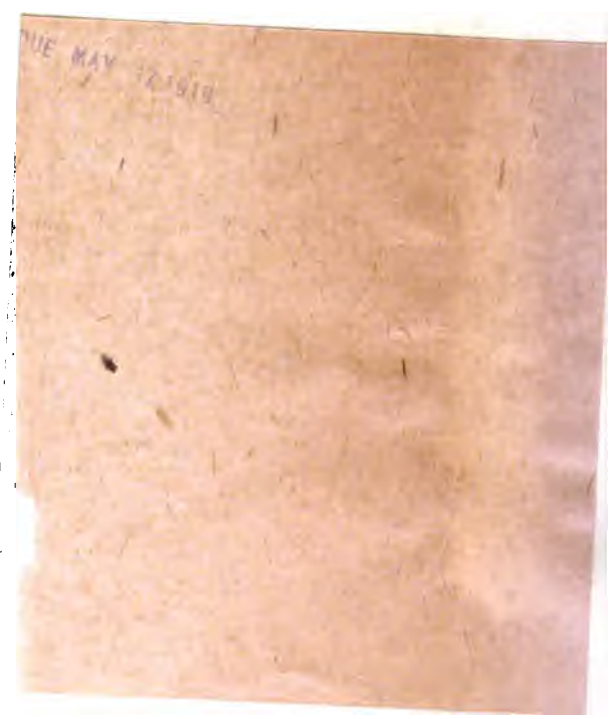
Note sur le calcul des cotisations des Sociétés de Secours Mutuels.

Note sur la résolution graphique des équations du premier degré.

Appendice au Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications.

Note sur les transmissions par bielle et manivelle.

Cours de Mécanique (3 fascicules).


DUE MAY